Lemme de Sperner et applications

Marnie Romanuik, Samuel Tréton

7 juin 2019

Table des matières

1 Le lemme de Sperner **3**

1.1 Lemme de Sperner en dimension 1 . . . 3
Énoncé du lemme . . . 3
Preuve du lemme . . . 4

1.2 Définitions prérequises . . . 6
Couples non ordonnés . . . 6
Ensemble convexe . . . 6
n–simplexe : $\mathcal{S}_n$ . . . 7
k–face d'un simplexe . . . 8
Triangulation d'un simplexe . . . 9
Fonction de coloriage de Sperner . . . 10
Graphe fini non orienté . . . 11

1.3 Lemme des poignées de mains . . . 12
Énoncé . . . 12
Preuve du lemme . . . 12

1.4 Lemme de Sperner en dimension 2 . . . 13
Énoncé du lemme . . . 13
Preuve du lemme . . . 13

1.5 Lemme de Sperner en dimension quelconque . . . 17
Énoncé du lemme . . . 17
Preuve du lemme . . . 17

2 Le Théorème de Brouwer **20**

2.1 Énoncé du théorème de Brouwer . . . 20
Ensemble compact . . . 20
Point fixe . . . 20
Théorème du point fixe de Brouwer . . . 21

2.2 Définitions et résultats prérequis . . . 22
Homéomorphisme . . . 22
Propriété du point fixe de Brouwer . . . 22
Propriété topologique . . . 22
La propriété du point fixe de Brouwer est topologique . . . 22
Tout compact convexe d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule unité fermée 24
Diamètre de triangulation . . . 27
Barycentre . . . 28
Combinaison convexe . . . 29
Simplexe canonique . . . 33

2.3 Démonstration du théorème de Brouwer 35

3 Problèmes de partage **41**
3.1 Partage sans jalousie d'un gâteau 41
3.2 Résolution algorithmique d'un partage de gâteau 46
3.2.1 Position du problème 46
3.2.2 Conception et triangulation de S_3 47
3.2.3 Étiquettes des joueurs sur les points de la triangulation 47
3.2.4 Choix des joueurs face à une découpe 48
3.2.5 Fonction de coloriage de Sperner 49
3.2.6 Recherche d'un triangle marqué 50
3.2.7 Indiçage des segments marqués sur le segment $[e_1e_2]$ 51
3.2.8 Boucle permettant de trouver un triangle marqué 52

Conclusion **54**

Bibliographie **55**

Chapitre 1

Le lemme de Sperner

Nous allons dans ce premier chapitre nous intéresser à l'énoncé et la preuve du *lemme de Sperner*. On en donnera tout d'abord une démonstration assez intuitive en dimension 1, puis une seconde démonstration viendra pour la dimension 2, laquelle nous permettra d'amorcer une récurrence sur la dimension afin de démontrer le lemme dans le cas général.

On utilisera par la suite la notation $[\![a;b]\!]$ qui désigne l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre a et b. Par exemple : $[\![0;4]\!] = \{0;1;2;3;4\}$.

1.1 Lemme de Sperner en dimension 1

On travaille dans cette section sur la droite réelle.

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $(A_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une suite finie de réels strictement croissante, f une application de $(A_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ dans $[\![0;1]\!]$ telle que $f(A_0) = 0$ et $f(A_n) = 1$.

Pour i dans $[\![0;n-1]\!]$, on dit que le segment $[A_iA_{i+1}]$ est *marqué* si $f(A_i) \neq f(A_{i+1})$.

Le lemme de Sperner asserte alors que

$\boxed{\text{le nombre de segments marqués est impair – en particulier, il en existe au moins un.}}$

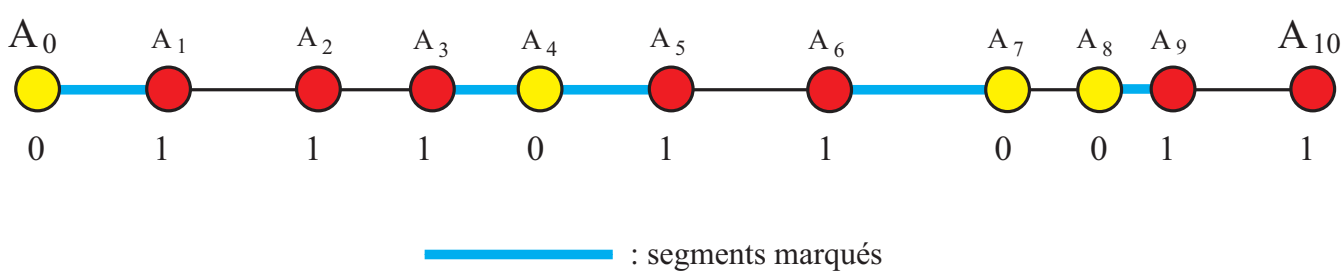


Figure 1.1 — Illustration du lemme de Sperner en dimension 1 avec onze points.

Preuve. (*Lemme de Sperner en dimension* 1)

À chaque segment $[A_iA_{i+1}]$, on associe la quantité $f(A_{i+1}) - f(A_i)$. Cette quantité vaut :

— soit 0 si $f(A_i) = f(A_{i+1})$,

— soit 1 si $f(A_i) = 0$ et $f(A_{i+1}) = 1$,

— soit -1 si $f(A_i) = 1$ et $f(A_{i+1}) = 0$.

On définit alors la partition de $[\![0; n-1]\!]$ avec les trois ensembles suivants :

$$Z = \{i \in [\![0; n-1]\!] \ / \ f(A_{i+1}) - f(A_i) = 0\},$$

$$P = \{i \in [\![0; n-1]\!] \ / \ f(A_{i+1}) - f(A_i) = 1\},$$

$$M = \{i \in [\![0; n-1]\!] \ / \ f(A_{i+1}) - f(A_i) = -1\},$$

et l'on pose :

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{Card}(Z), \\ p &= \mathrm{Card}(P), \\ m &= \mathrm{Card}(M). \end{aligned}$$

Puisque p compte les passages de 0 à 1 et comme m compte les passages de 1 à 0, **la quantité $p + m$ compte le nombre de segments marqués**.

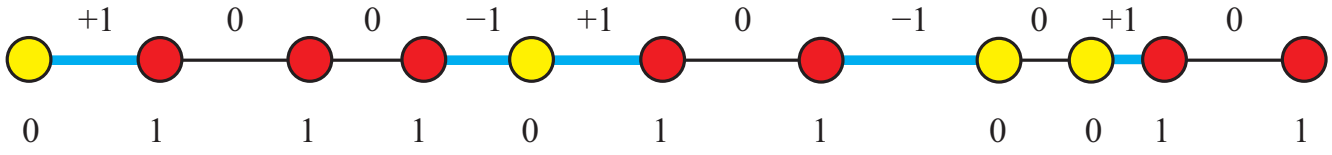


Figure 1.2 — Illustration reprenant l'exemple précédent : ici on a $z = 5$, $p = 3$ et $m = 2$.

On a alors, par télescopage :

$$f(A_n) - f(A_0) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(A_{i+1}) - f(A_i)).$$

Or les images par f de A_0 et A_n sont respectivement 0 et 1, donc :

$$f(A_n) - f(A_0) = 1 - 0 = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(A_{i+1}) - f(A_i)) = 1.$$

On découpe la somme selon que $f(A_{i+1}) - f(A_i)$ vaut 0, 1 ou -1 :

$$\underbrace{\sum_{i \in Z} (f(A_{i+1}) - f(A_i))}_{z \text{ termes nuls}} + \underbrace{\sum_{i \in P} (f(A_{i+1}) - f(A_i))}_{p \text{ termes égaux à } 1} + \underbrace{\sum_{i \in M} (f(A_{i+1}) - f(A_i))}_{m \text{ termes égaux à } -1} = 1.$$

Donc

$$z \cdot 0 + p \cdot 1 + m \cdot (-1) = 1,$$

d'où

$$p - m = 1,$$

et en ajoutant $2m$ à chacun des membres de l'équation :

$$p + m = 2m + 1.$$

Ainsi $p + m$ est impair,

d'où le résultat annoncé.

□

1.2 Définitions prérequises

Définition 1. *Couples non ordonnés*

Soit E un ensemble fini non vide, on crée la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\star$ sur E^2 de cette façon :

$$\forall\left((x,y),(z,t)\right)\in E^2\times E^2,\quad (x,y)\,\mathcal{R}_\star\,(z,t)\iff\begin{cases} z=x \text{ et } t=y \\ \text{ou} \\ z=y \text{ et } t=x\end{cases}.$$

On appelle *produit cartésien non ordonné* l'ensemble quotient $E^2_\star = E^2/\ \mathcal{R}$, et l'on nomme *couple non ordonné* toute classe d'équivalence de $E^2_\star$.

Soit n un entier naturel.

Définition 2. *Ensemble convexe*

Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que l'ensemble E est *convexe* s'il contient tous les segments dont il contient les deux extrémités. Autrement dit,

$$\forall(x,y)\in E,\quad \{\ tx+(1-t)\,y\ \ /\ \ t\in[0;1]\ \}\subset E.$$

Définition 3. *Enveloppe convexe*

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathbb{R}^n$ indexée par un ensemble fini I.

On appelle *enveloppe convexe* de la famille de points $(A_i)_{i\in I}$ l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathbb{R}^n$ qui contiennent $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Une telle partie existe puisqu'il existe au moins une partie convexe contenant $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, à savoir $\mathbb{R}^n$.

On notera cette partie $Conv\left((A_i)_{i\in I}\right)$.

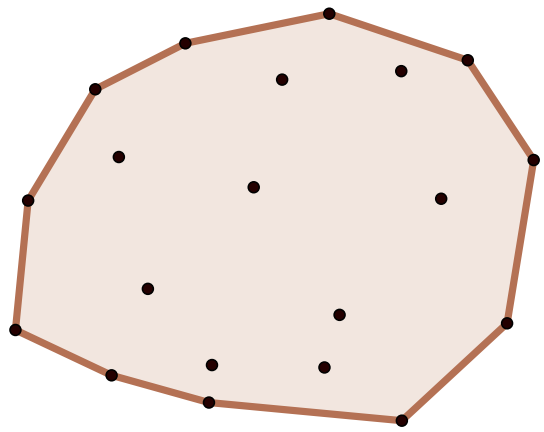


Figure 1.3 — Exemple d'une enveloppe convexe dans le plan : c'est intuitivement la plus petite partie convexe contenant chacun des points A_i.

Définition 4. *n–simplexe : $\mathcal{S}_n$*

Dans un espace affine de dimension supérieure ou égale à n, un n–simplexe $\mathcal{S}_n$ est l'enveloppe convexe d'une famille de $(n+1)$ points formant un repère d'un espace affine de dimension n, c'est-à-dire qu'en notant cette famille $(A_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$, la famille de n vecteurs $\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est libre.

On notera $\mathcal{S}_n = [A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ en généralisant la notation du segment.

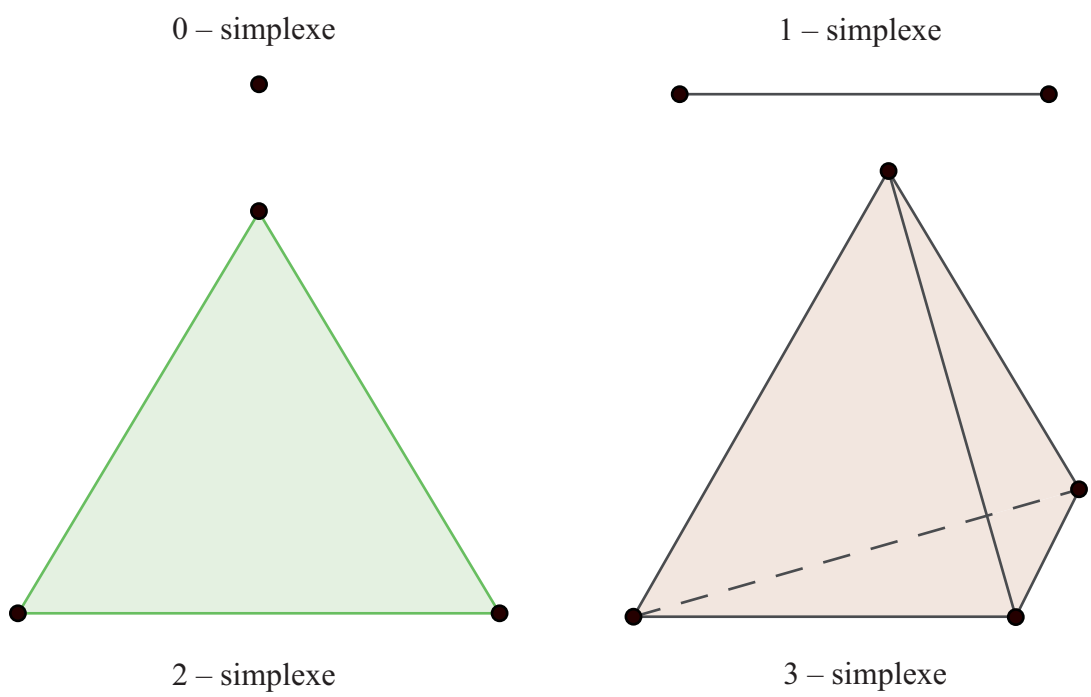


Figure 1.4 — Les simplexes des quatre premières dimensions : le point, le segment, triangle et le tétraèdre.

Au-delà de la dimension 3, la représentation des simplexes devient moins évidente. Pour illustrer nos exemples, nous utiliserons essentiellement la dimension 2 qui est la plus intéressante pour le compromis qu'elle offre entre les termes de facilité de manipulation et de quantité d'information.

Définition 5. *k–face d'un simplexe*

Soit $\mathcal{S}_n = [A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ un n–simplexe. Pour k dans $[\![0;n-1]\!]$, on appelle *k–face* tout k–simplexe $[A_i]_{i\in I}$ où I est une partie de $[\![0;n]\!]$ de cardinal $k+1$.

On a pour habitude d'appeler :

— sommets les 0–faces,

— arêtes les 1–faces,

— faces les 2–faces,

— cellules les 3–faces.

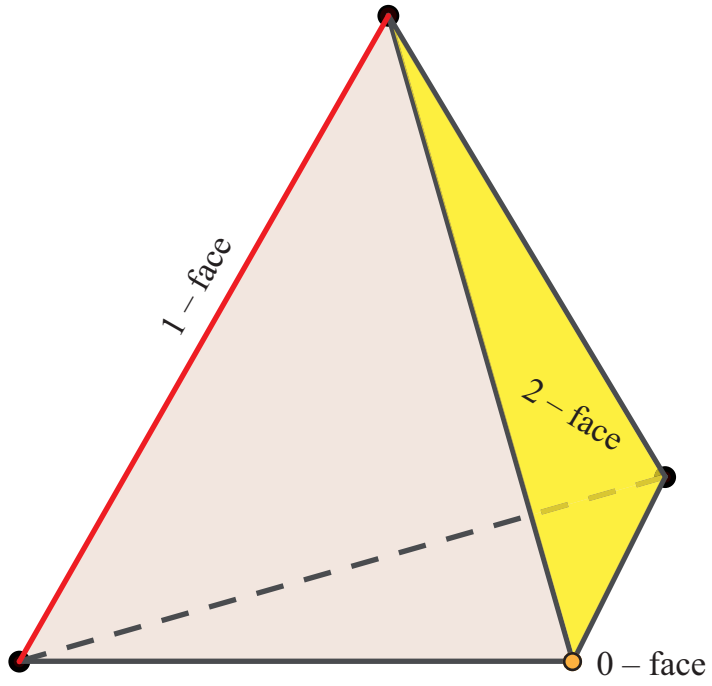


Figure 1.5 — Les k–faces d'un 3–simplexe.

Pour tout k dans $[\![0;n-1]\!]$, on notera F_k l'ensemble des k–faces et on appellera *sous-faces* du simplexe les éléments de la réunion $\bigcup_{i\in[\![0;n-1]\!]} F_k$.

Définition 6. *Triangulation d'un simplexe*

Soit $\mathcal{S}_n = [A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ un n–simplexe. On appelle *triangulation* de $\mathcal{S}_n$ toute famille de n–simplexes $\mathcal{T} = (T_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^n$ indexée par un ensemble I fini et vérifiant :

$$\bigcup_{i\in I} T_i = \mathcal{S}_n,$$

et

$$\forall\,(i,j)\in I^2,\quad i\neq j \Longrightarrow T_i\cap T_j = \begin{cases} \varnothing \\ \text{ou} \\ \text{Une sous-face commune à } T_i \text{ et } T_j \end{cases}.$$

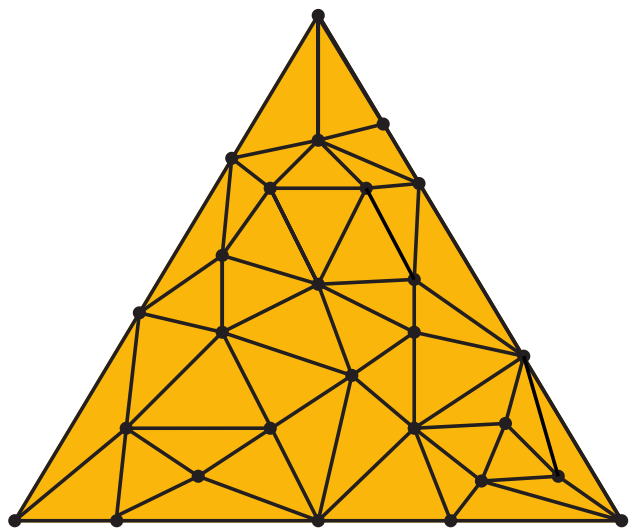


Figure 1.6 — Exemple d'une triangulation d'un 2–simplexe.

En regardant la Figure 1.6 on remarquera par exemple qu'étant donné deux triangles différents de la triangulation, soit ils sont disjoints, soit ils partagent une 0–face, soit ils partagent une 1–face.

On appellera *région* de la triangulation tout n–simplexe T_i de $\mathcal{T}$.

Notation.

On aura besoin par la suite de travailler avec les sommets des simplexes de la triangulation $\mathcal{T}$. C'est pourquoi nous allons adopter la notation $\widehat{T_i}$ qui désignera l'ensemble des sommets du simplexe de Ti, et on pose $\widehat{\mathcal{T}} = \bigcup_{i\in I} \widehat{T_i}$ l'ensemble des sommets des simplexes de $\mathcal{T}$.

Définition 7. *Fonction de coloriage de Sperner*

Soient $\mathcal{S}_n = [A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ un n–simplexe et $\mathcal{T}$ une triangulation de $\mathcal{S}_n$.

On appelle *fonction de coloriage de Sperner* toute application $f : \widehat{\mathcal{T}} \longrightarrow [\![0;n]\!]$ vérifiant :

$$\forall I \in P\left([\![0;n]\!]\right), \quad f\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_i]_{i\in I}\right) = I.$$

Par exemple sur un 2-simplexe $[A_0A_1A_2]$, si l'on considère la triangulation T constituée du simplexe lui-même, on a :

$$f(A_0) = 0 \quad , \quad f(A_1) = 1 \quad , \quad f(A_2) = 2,$$

$$f(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_0A_1]) = \{0;1\} \quad , \quad f(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_1A_2]) = \{1;2\} \quad , \quad f(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_0A_2]) = \{0;2\},$$

$$f(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_0A_1A_2]) = \{0,1,2\}.$$

Pour $T_i \in \mathcal{T}$, on dira que le n–simplexe T_i est *marqué* si $f\left(\widehat{T_i}\right) = [\![0;n]\!]$.

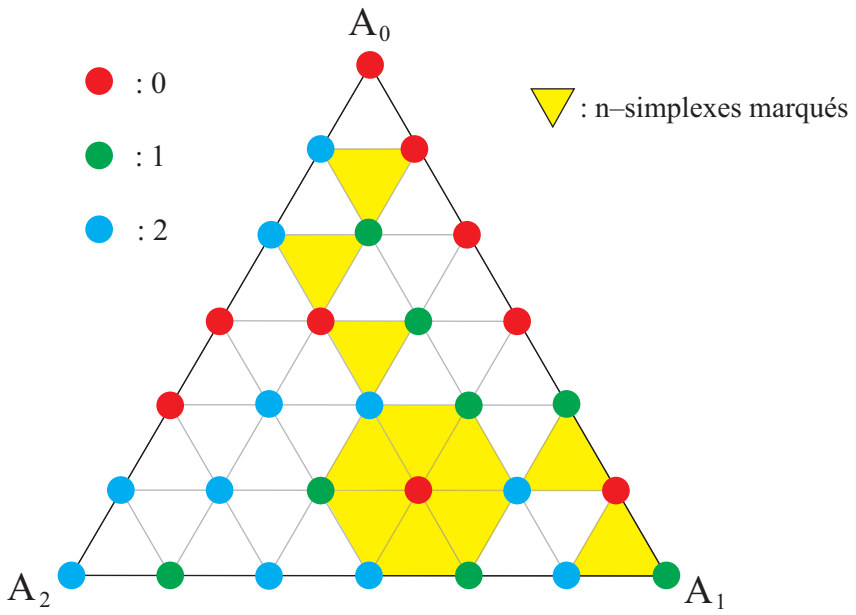


Figure 1.7 — Exemple d'une fonction de coloration de Sperner sur un 2–simplexe muni d'une triangulation régulière.

Définition 8. *Graphe fini non orienté*

Un *graphe fini non orienté* $\mathcal{G}$ est la donnée d'un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{R})$ où :

— $\mathcal{V}$ est un ensemble fini,

— $\mathcal{R}$ est une relation binaire symétrique et non réflexive sur $\mathcal{V}$.

Les éléments de $\mathcal{V}$ sont appelés les *nœuds* du graphe et les couples non ordonnés de l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{ \overline{(x,y)} \in \mathcal{V}_\star^2 \ / \ x \ \mathcal{R} \ y \right\}$ sont appelés *arêtes* du graphe.

Notation.

Étant donné un nœud x du graphe, on appelle *degré du nœud* le nombre de points avec lesquels il est en relation. On notera cet entier naturel $deg(x)$.

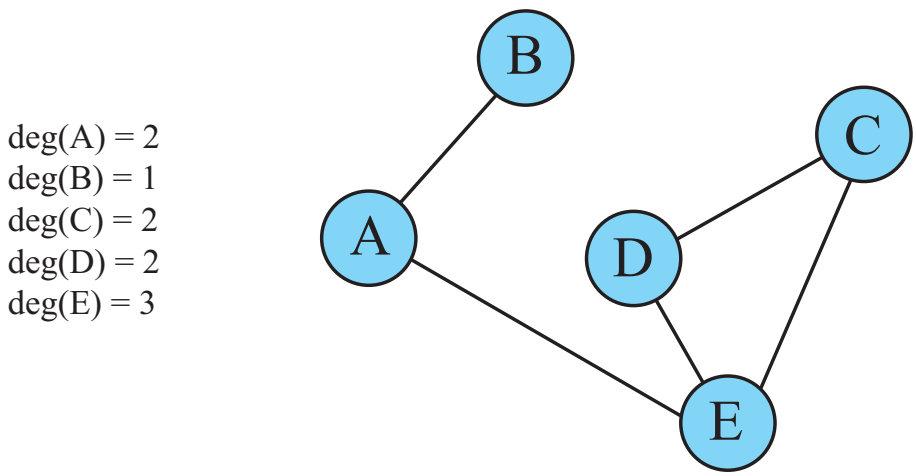


Figure 1.8 — Exemple d'un graphe fini non orienté.

1.3 Lemme des poignées de mains

Étant donné un graphe fini non orienté,

le nombre de nœuds de degré impair est pair.

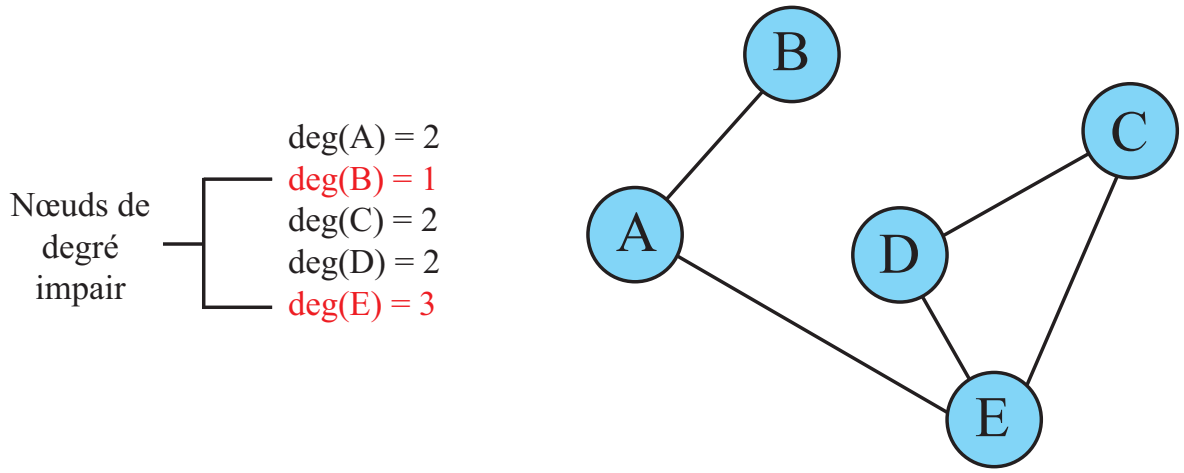


Figure 1.9 — Le lemme des poignées de mains sur l'exemple précédent : il y a 2 nœuds de degré impair.

Preuve. (*Lemme des poignées de mains*)

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{R})$ un graphe fini non orienté.

La démonstration va se faire par double dénombrement : on va compter de deux façons différentes le nombre d'extrémités des arêtes du graphe.

On note N le nombre d'extrémités des arêtes de $\mathcal{G}$. On a alors :

$$N = 2 \cdot Card\,(\mathcal{E})\,,$$

Ce qui nous permet de dire que N est pair. D'autre part,

$$N = \sum_{x \in \mathcal{V}} deg(x).$$

Comme $deg(x)$ est entier pour tout x de $\mathcal{V}$, on déduit de la parité de N que les contributions impaires de la somme précédente sont en nombre pair. Donc les nœuds de degré impair sont en nombre pair.

□

1.4 Lemme de Sperner en dimension 2

Soient $\mathcal{S}_2 = [A_0A_1A_2]$ un 2–simplexe, $\mathcal{T} = (T_i)_{i\in I}$ une triangulation de $\mathcal{S}_2$, et $f : \widehat{\mathcal{T}} \to [\![0;2]\!]$ une fonction de coloriage de Sperner.

Le lemme de Sperner asserte alors que

$\boxed{\text{le nombre de triangles marqués de } \mathcal{T} \text{ est impair – en particulier, il en existe au moins un.}}$

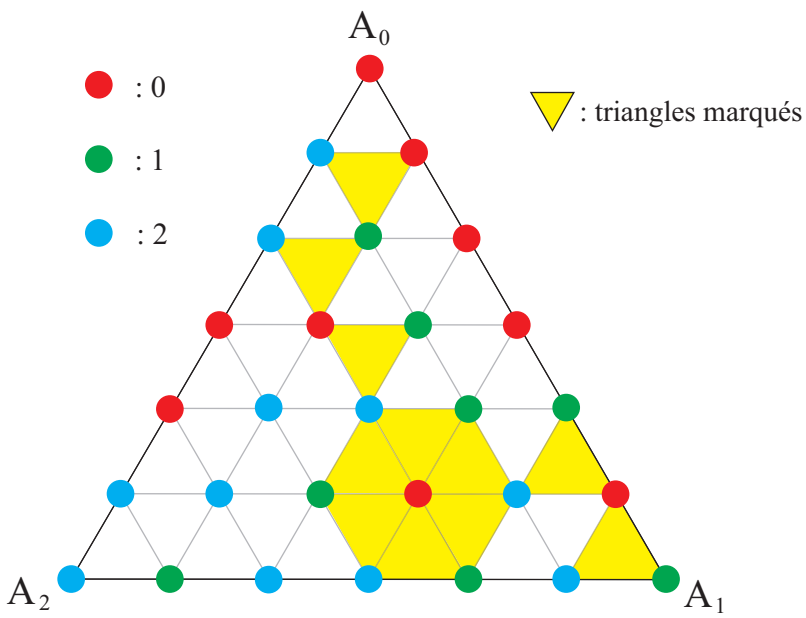


Figure 1.10 — Illustration du lemme de Sperner en dimension 2 en reprenant l'exemple de la figure 1.7.

Preuve. (*Lemme de Sperner en dimension* 2)

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ le graphe fini non orienté dépendant du simplexe $\mathcal{S}_2$, de la triangulation $\mathcal{T}$ et de la fonction de coloriage f de la façon suivante :

— chaque région T_i de $\mathcal{T}$ ainsi que que l'ensemble $E = \complement_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{S}_2)$ constitue un nœud du graphe, $\mathcal{V} = \left\{(T_i)_{i\in I} \cup \{\{E\}\}\right\}$ est ainsi une famille de parties de $\mathbb{R}^2$,

— deux nœuds sont en relation s'ils partagent une intersection qui est un segment dont l'image par f de ses deux extrémités est $\{1;2\}$ – on notera ces segments *segments de passage*.

Notons à ce stade que le choix du couple de couleurs $\{1;2\}$ est totalement arbitraire et qu'on aurait très bien pu prendre le couple $\{0;1\}$ ou $\{0;2\}$ sans que ça ne perturbe la démonstration.

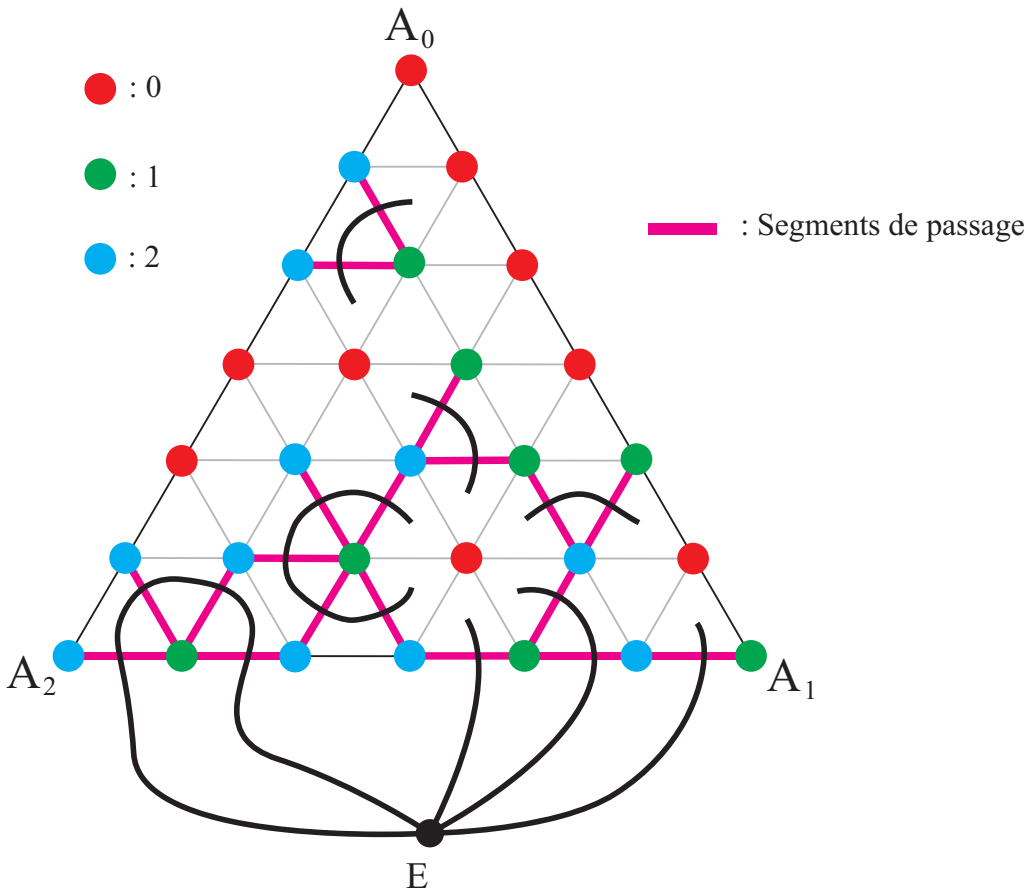


Figure 1.11 — Le graphe $\mathcal{G}$ résultant de l'exemple choisi.

On applique le lemme de Sperner en dimension 1 au segment $[A_1A_2]$ car $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap [A_1A_2]$ est une triangulation de $[A_1A_2]$ et $f\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_1A_2]\right) = \{1;2\}$.

Donc on a que le nombre de *segments de passage* sur $[A_1A_2]$ est impair.

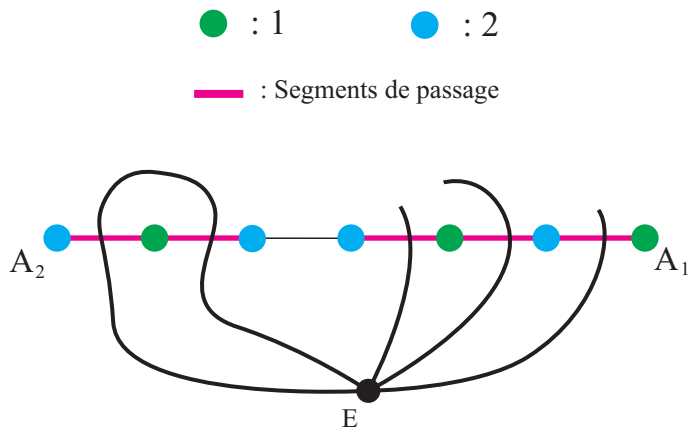


Figure 1.12 — Application du lemme de Sperner en dimension 1 sur le segment $[A_1A_2]$ muni de $\mathcal{T}'$ et de la restriction de f à $\mathcal{T}'$.

Or E n'a de *segments de passage* que des segments de $[A_1A_2]$ puisqu'il n'est au contact des autres nœuds que par les segments de

$$\partial\mathcal{S}_2 = [A_1A_2] \cup [A_0A_2] \cup [A_0A_1]\,,$$

et sur les segments $[A_0A_2]$ et $[A_0A_1]$,

$$f\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_0A_2]\right) = \{0;2\}\,,$$

$$f\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_0A_1]\right) = \{0;1\}\,.$$

Donc $deg(E)$ est impair.

D'après le lemme des poignées de mains, dans $\mathcal{G}$, le nombre de nœuds de degré impair est pair. Comme $deg(E)$ est impair, on peut en déduire que parmi les nœuds T_i, les nœuds de degré impair sont en nombre impair.

Étant donné un triangle T_i de la triangulation, passons en revue les différentes possibilités de coloration pour ses sommets suivant son degré. Notons avant de commencer qu'une permutation de sommets sur un triangle n'interfère en aucun cas avec le caractère marqué ou non de celui-ci ; aussi, les différents cas seront donnés *modulo* une permutation de points.

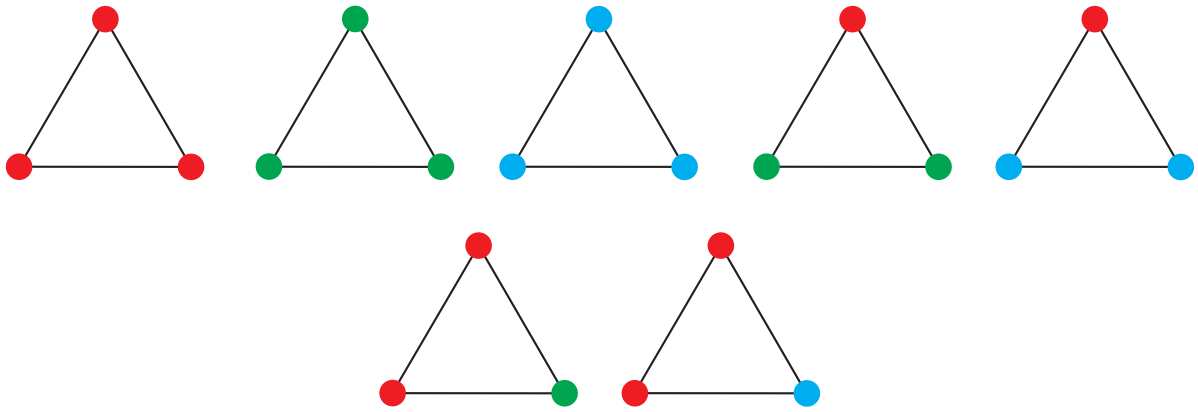


Figure 1.13 — $deg\,(T_i) = 0$: il n'y a aucun segment de passage.

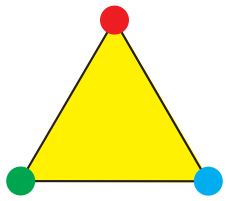


Figure 1.14 — $deg\,(T_i) = 1$: il y a un segment de passage : le triangle est marqué.

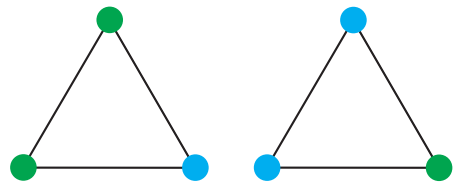


Figure 1.15 — $deg\,(T_i) = 2$: il y a deux segments de passage.

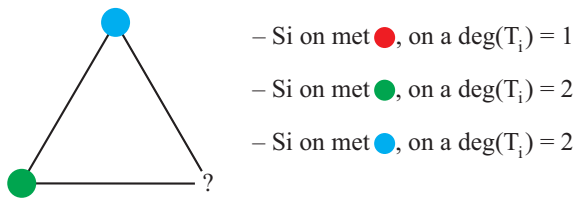


Figure 1.16 — $deg\,(T_i) = 3$: impossible car il faudrait trois segments de passage et on est limité à trois sommets.

— $deg\,(T_i) > 3$: impossible car T_i est un triangle donc il partage au plus trois segments avec les autres nœuds.

Ainsi on a l'équivalence suivante pour tout $T_i \in \mathcal{T}$:

$$T_i \text{ est marqué} \iff deg\,(T_i) = 1.$$

De plus, on a également,

$$deg\,(T_i) = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2,$$

donc

$$deg\,(T_i) = 1 \iff deg\,(T_i) \text{ est impair.}$$

Par transitivité de l'équivalence, on a ainsi :

$$T_i \text{ est marqué} \iff deg\,(T_i) \text{ est impair.}$$

Or parmi les T_i de la triangulation, les nœuds de degré impair sont en nombre impair,

par conséquent le nombre de triangles marqués de $\mathcal{T}$ est impair.

□

1.5 Lemme de Sperner en dimension quelconque

Soient $\mathcal{S}_n = [A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ un n–simplexe, $\mathcal{T} = (T_i)_{i\in I}$ une triangulation de $\mathcal{S}_n$, et $f : \widehat{\mathcal{T}} \to [\![0;n]\!]$ une fonction de coloriage de Sperner.

Le lemme de Sperner asserte alors que

$\boxed{\text{le nombre de } n\text{–simplexes marqués de } \mathcal{T} \text{ est impair – en particulier, il en existe au moins un.}}$

Preuve. (*Lemme de Sperner en dimension quelconque*)

On va faire la démonstration par récurrence sur la dimension. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la proposition

$$\mathcal{H}(n) : \text{« le lemme de Sperner est vérifié en dimension } n. \text{ »}$$

$\boxed{\text{INITIALISATION}}$: Par la section 1.1, on a que $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{HÉRÉDITÉ}}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{H}(n)$ vérifiée.

Soient $\mathcal{S}_{n+1} = [A_i]_{i\in[\![0;n+1]\!]}$ un $(n+1)$–simplexe, $\mathcal{T} = (T_i)_{i\in I}$ une triangulation de $\mathcal{S}_{n+1}$, et $f : \widehat{\mathcal{T}} \to [\![0;n+1]\!]$ une fonction de coloriage de Sperner.

On crée le graphe fini non orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{R})$ dépendant de $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{T}$, et f définis de façon analogue à celui fabriqué pour la démonstration du lemme en dimension 2 :

— chaque région T_i de $\mathcal{T}$ ainsi que que l'ensemble $E = \complement_{\mathbb{R}^{n+1}}(\mathcal{S}_{n+1})$ constitue un nœud du graphe, $\mathcal{V} = \left\{(T_i)_{i\in I} \cup \{\{E\}\}\right\}$ est ainsi une famille de parties de $\mathbb{R}^{n+1}$,

— deux nœuds sont en relation s'ils partagent une intersection qui est un n–simplexe dont l'image de ses $n+1$ sommets par f est $[\![0;n]\!]$.

De façon analogue à la dimension 2, où l'on avait introduit le terme *segment de passage*, on appellera ces n–simplexes *n–simplexes de passage*.

On considère le nœud E du graphe : E n'a de n–simplexes de passage que des n–simplexes de la n–face $[A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ car pour toute autre n–face $[A_i]_{i\in J_k} = [A_i]_{i\in[\![0;n+1]\!]\setminus\{k\}}$ avec $k \in [\![0;n]\!]$, on a :

$$f\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [A_i]_{i\in J_k}\right) = J_k \neq [\![0;n]\!].$$

Donc pour tout k de $[\![0;n]\!]$, la n-face $[A_i]_{i\in J_k}$ ne possède pas de n–simplexe de passage.

On applique grâce à l'hypothèse de récurrence le lemme de Sperner en dimension n à $[A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ muni de la triangulation $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap [A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$ et de la fonction de coloration de $f_{|\widehat{\mathcal{T}'}}$. Ainsi on compte un nombre impair de n–simplexes de passage sur $[A_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$.

Donc $deg(E)$ est impair.

On applique le lemme des poignées de mains au graphe : le nombre de nœuds de degré impair est pair, ce qui, lié au fait que $deg(E)$ est impair, nous permet de déduire que parmi les $(n+1)$–simplexes T_i de $\mathcal{T}$, les $(n+1)$–simplexes de degré impair sont en nombre impair.

On va à présent montrer l'équivalence suivante : pour tout T_i de $\mathcal{T}$,

$$T_i \text{ est marqué} \iff deg(T_i) = 1.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$: Soit T_i dans $\mathcal{T}$, supposons que $deg\,(T_i) = 1$.

Alors il y a un seul ensemble de $n+1$ sommet de $\widehat{T_i}$ dont l'image par f est $[\![0;n]\!]$. Il reste donc un seul sommet auquel on doit attribuer une couleur. Si l'image de ce sommet par f était un nombre de $[\![0;n]\!]$, alors il existerait un second ensemble de $n+1$ sommet de $\widehat{T_i}$ dont l'image par f serait $[\![0;n]\!]$. Donc $deg(T_i)$ serait égal à 2. Ainsi, nécessairement, l'image de ce dernier sommet par f est $n+1$.

Et dans ce cas, $f\left(\widehat{T_i}\right) = [\![0;n+1]\!]$ donc T_i est marqué.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Si le $(n+1)$–simplexe T_i est marqué, alors il existe une unique partie de $\widehat{T_i}$ de $n+1$ points dont l'image par f est $[\![0;n]\!]$ puisque $f\left(\widehat{T_i}\right) = [\![0;n+1]\!]$ donc T_i possède un seul *segment de passage*, ainsi $deg(T_i) = 1$.

L'équivalence est donc établie.

On remarque également que pour tout T_i de $\mathcal{T}$ on a $deg\,(T_i) < 3$; en effet, le fait que T_i soit au moins de degré 1 impose que $f\left(\widehat{T_i}\right)$ contient $[\![0;n]\!]$. Comme $\widehat{T_i}$ possède $n+2$ points, et donc que $n+1$ points de $\widehat{T_i}$ sont en bijection avec $[\![0;n]\!]$, il reste donc un seul point auquel attribuer un nombre pour finaliser la numérotation de T_i : soit on le numérote avec $n+2$ et dans ce cas-là, $deg\,(T_i) = 1$; soit on le numérote avec un autre nombre déjà utilisé, et alors $deg\,(T_i) = 2$.
Ainsi, pour tout T_i de $\mathcal{T}$, $deg\,(T_i) < 3$.

D'où,

$$deg\,(T_i) = 1 \iff deg\,(T_i) \text{ est impair .}$$

Ainsi par transitivité de l'équivalence, on a que pour tout T_i de $\mathcal{T}$,

$$T_i \text{ est marqué } \iff deg\,(T_i) \text{ est impair .}$$

Or nous avons vu que le nombre de nœuds de degré impair relatifs aux régions de $\mathcal{T}$ est impair, on peut donc conclure que le nombre de $(n+1)$–simplexes de $\mathcal{T}$ marqués est impair.

Donc on a le lemme de Sperner en dimension $n+1$.

Ainsi, $\mathcal{H}\,(n+1)$ vraie.

$\boxed{\text{CONCLUSION}}$:

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le lemme de Sperner fonctionne en dimension n.

$\square$

Chapitre 2

Le Théorème de Brouwer

Au cours de ce deuxième chapitre nous allons voir une application du lemme de Sperner dans la démonstration du *théorème du point fixe de Brouwer*. Ce théorème asserte que toute application continue d'un convexe compact sur lui-même possède au moins un point fixe. Une illustration bien connue du théorème du point fixe de Brouwer est celle de la tasse de thé : en mélangeant le sucre dans une tasse de thé circulaire, il semble qu'à tout instant on puisse trouver un point de la surface qui a retrouvé sa position initiale.

Il sera nécessaire avant de se lancer dans la démonstration d'introduire quelques nouvelles notions ainsi que de montrer quelques résultats qui nous seront utiles pour la suite.

Sauf mention du contraire, on travaille dans tout ce chapitre sur l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de sa norme euclidienne.

2.1 Énoncé du théorème de Brouwer

Définition 9. *Ensemble compact*

Soit K une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que K est compact si, et seulement si, de tout recouvrement de K par des ouverts il est possible d'extraire un sous-recouvrement *fini*.

Par ailleurs, nous disposons également des définitions équivalentes suivantes :

— K est *fermé* et *borné*.[1]

— Pour toute suite à valeurs dans K, *on peut extraire une sous-suite convergente dans* K.[2]

Définition 10. *Point fixe*

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application de K dans K.

On dit qu'un point x de K est un *point fixe de* f s'il reste inchangé par l'application f. Autrement dit, $f(x) = x$.

1. Cette équivalence est possible étant donné que $\mathbb{R}^n$ est de dimensions finie.
2. Ce résultat porte également le nom de théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 1. *Point fixe de Brouwer*

Soit K un compact convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application *continue* de K dans K.

On a alors le résultat qui suit :

$\boxed{\text{l'application } f \text{ admet au moins un point fixe.}}$

Exemple.

Dans $\mathbb{R}$, prenons la fonction f définie sur le compact $K = [0, 10]$ par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & 5 \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right) + 1. \end{array} \right.$$

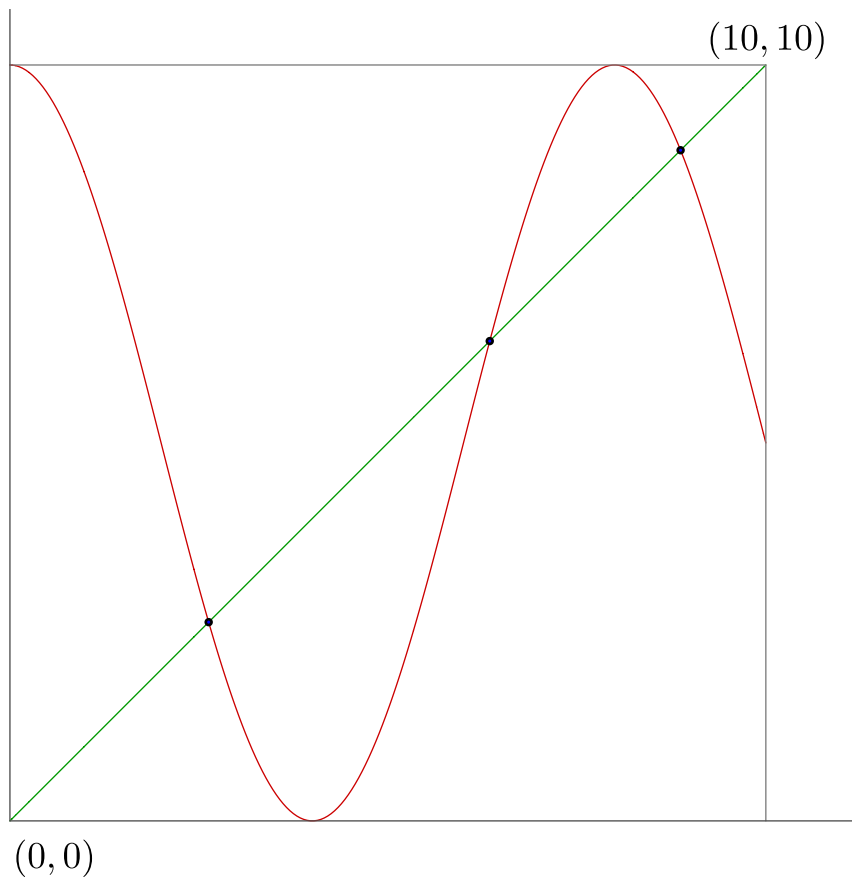


Figure 2.1 — La fonction est continue de K dans K, on remarque qu'elle possède trois points fixes.

2.2 Définitions et résultats prérequis

Définition 11. *Homéomorphisme*

Soient K et L deux compacts de $\mathbb{R}^n$ et φ une application de K dans L, on dit que φ est un *homéomorphisme* si φ est continue, bijective et si sa réciproque φ^{-1} est continue.

On dira alors que les deux compacts K et L sont *homéomorphes*.

Intuitivement, deux compacts sont *homéomorphes* s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une déformation continue, comme s'il s'agissait d'une pâte à modeler indéchirable.

Remarque.

La relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$ par

$$K \mathcal{R} L \iff K \text{ et } L \text{ sont homéomorphes}$$

est d'équivalence.

Définition 12. *Propriété du point fixe de Brouwer*

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On dit que K possède la *propriété du point fixe de Brouwer* si pour toute application f continue de K dans K, f possède au moins un point fixe.

Remarque.

On peut à présent reformuler le théorème du point fixe de Brouwer de la façon suivante :

Tout compact convexe d'intérieur non vide possède la propriété du point fixe de Brouwer.

Définition 13. *Propriété topologique*

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{P}$ une propriété vérifiée par K. On dit que $\mathcal{P}$ est *topologique* si pour tout compact L homéomorphe à K, L possède aussi la propriété $\mathcal{P}$.

Proposition.

La propriété du point fixe de Brouwer est topologique.

Preuve. (*Proposition*)

Soient K et L deux compacts de $\mathbb{R}^n$ et φ un homéomorphisme de K dans L. Supposons que K possède la propriété du point fixe de Brouwer.

Soit donc f une application continue de L dans L.

Considérons l'application $\tilde{f} = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ de K dans K. Étant la composée d'applications continues, $\tilde{f}$ est continue. Comme K possède la propriété du point fixe de Brouwer, il existe k dans K tel que $\tilde{f}(k) = k$.

Calculons à présent l'image de $\ell = \varphi(k)$ par f en remarquant que $f = \varphi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$. On a alors les égalités successives :

$$\begin{aligned} f(\ell) &= f(\varphi(k)) \\ &= \varphi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}(\varphi(k)) \\ &= \varphi\left(\tilde{f}\left(\varphi^{-1}(\varphi(k))\right)\right) \\ &= \varphi\left(\tilde{f}(k)\right) \\ &= \varphi(k) \\ &= \ell. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(\ell) = \ell$.

Donc pour toute application continue f de L dans L, f possède au moins un point fixe ; autrement dit, L possède la propriété du point fixe de Brouwer.

□

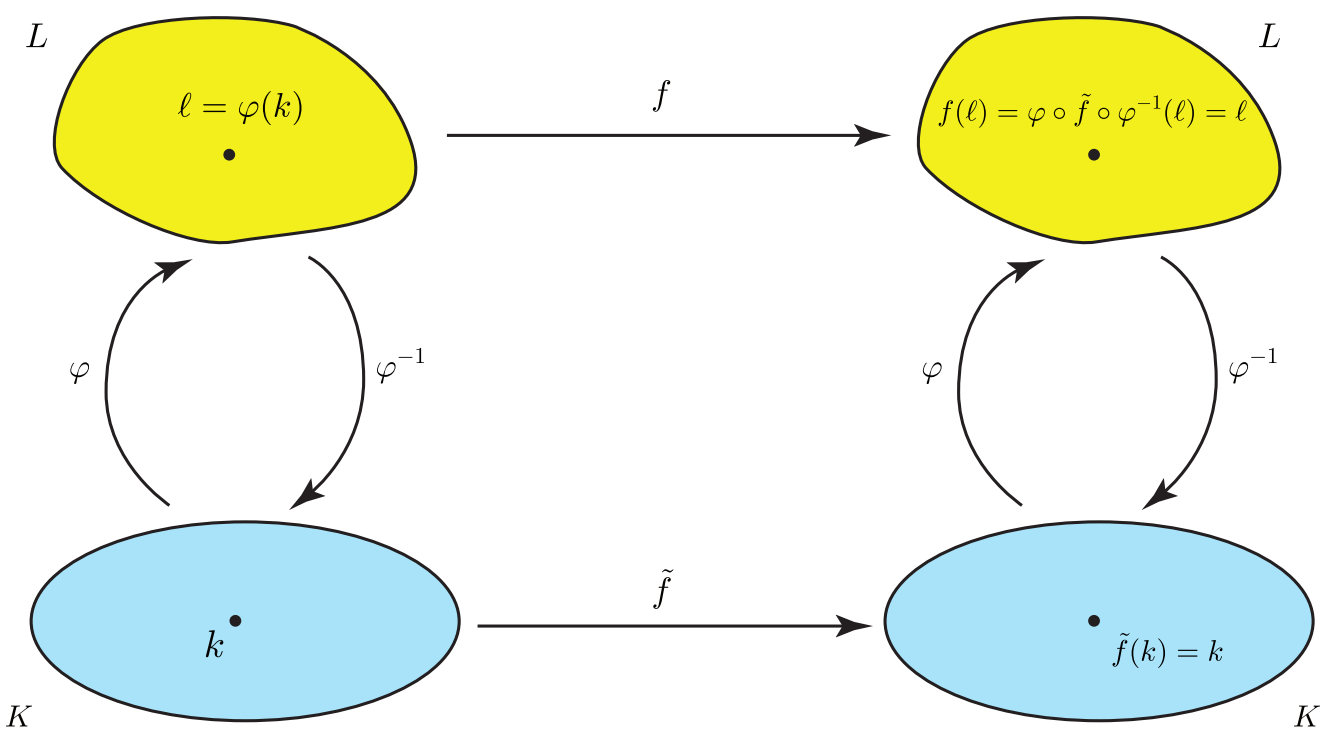


Figure 2.2 — Schéma résumant la démonstration précédente.

Proposition.

Tout compact convexe d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule unité fermée.

Preuve. (*Proposition*)

Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il est alors possible de translater K puis de l'agrandir suffisamment pour qu'il contienne $B = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$.

La nouvelle partie de $\mathbb{R}^n$ qu'on notera L est ainsi homéomorphe à K par l'homéomorphisme

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & (x+t)\cdot s \end{array} \right. ,$$

où $t \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de translation et $s \in [1, +\infty[$ est le facteur d'homothétie.

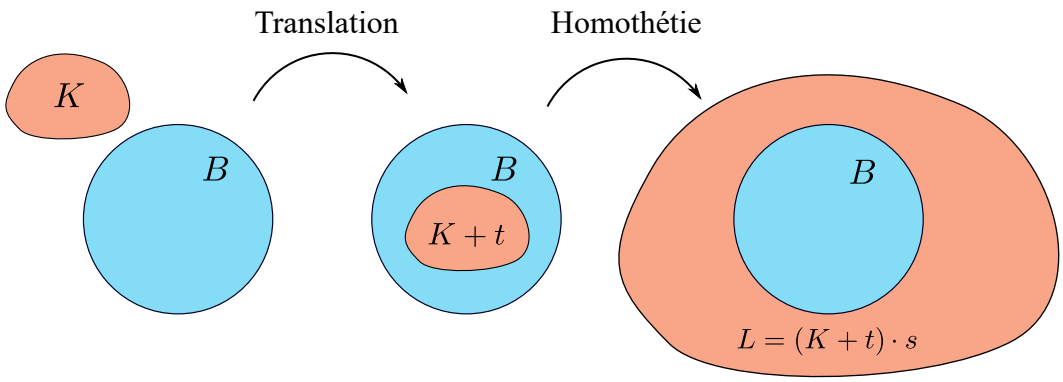


Figure 2.3 — Translation et homothétie du compact convexe K.

Il s'agit à présent de montrer que L est homéomorphe à B, on aura ainsi, par transitivité de la relation *homéomorphe* : K homéomorphe à B.

Soit x dans L, posons $T(x) = \sup\limits_{t\in[1,+\infty[} \left\{ t \cdot \frac{x}{\|x\|} \in L \right\}$, et

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \cdot T(x) & \text{si } x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}^n} & \text{si } x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases} \end{array} \right. .$$

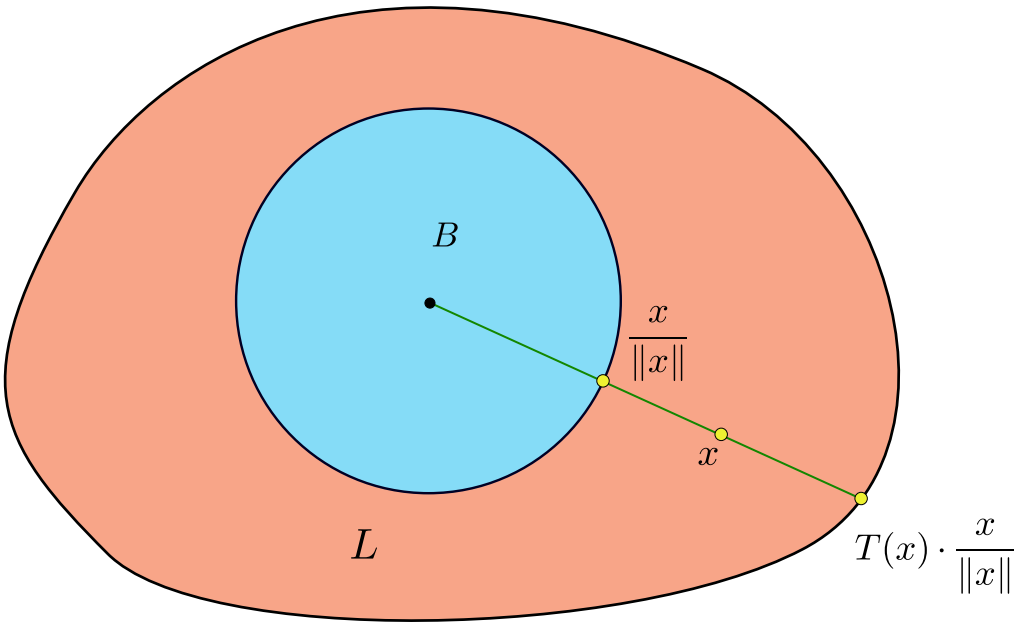


Figure 2.4 — Intuitivement l'application ψ « étire » les rayons de B jusqu'au bord de L.

Nous allons à présent montrer :

1. ψ est bien définie.
2. ψ est à valeurs dans L.
3. ψ est est bijective.
4. ψ et sa réciproque sont continues.

---

1. On s'assure de l'existence $T(x)$ pour tout x de L. Le caractère compact de L nous assure qu'il est borné et donc que pour tout x de L, $T(x) \leq \operatorname{diam}(L) < +\infty$.

---

2. Soit x dans B,

— Si $\|x\| = 1$, alors

$$\psi(x) = x \cdot T(x) = x \cdot T(x) = \sup_{t \in [1,+\infty[} \{t \cdot x \in L\}.$$

Donc $\psi(x)$ appartient bien à L car L est fermé [3].

3. On aurait pu remplacer *sup* par *max* dans la définition de T étant donné que L est fermé.

— Si $0 < \|x\| < 1$, on a

$$\frac{\psi(x)}{\|x\|} = T(x) \cdot \frac{x}{\|x\|}.$$

Donc $\frac{\psi(x)}{\|x\|}$ appartient à L.

Par ailleurs,

$$\left\| \frac{\psi(x)}{\|x\|} \right\| = \frac{\|\psi(x)\|}{\|x\|} > \|\psi(x)\| \quad \text{car } \frac{1}{\|x\|} > 1.$$

On a donc $\left\| \frac{\psi(x)}{\|x\|} \right\| > \|\psi(x)\|$ et d'autre part, les vecteurs $\frac{\psi(x)}{\|x\|}$ et $\psi(x)$ sont colinéaires et de même sens ; donc le segment $[0_{\mathbb{R}^n}\ \psi(x)]$ est inclus dans le segment $\left[0_{\mathbb{R}^n}\ \frac{\psi(x)}{\|x\|}\right]$.

Or $\frac{\psi(x)}{\|x\|} \in L$ donc $\left[0_{\mathbb{R}^n}\ \frac{\psi(x)}{\|x\|}\right] \subset L$ car L est convexe, donc $[0_{\mathbb{R}^n}\ \psi(x)] \subset L$ et par conséquent, $\psi(x) \in L$.

— Si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\psi(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \in B \subset L$.

---

3. Montrons la surjectivité de l'application ψ :

En premier lieu, $0_{\mathbb{R}^n}$ possède un antécédent par ψ, soit donc y dans $L/\ 0_{\mathbb{R}^n}$,

$$y = \psi(x) \iff y = x \cdot T(x).$$

Or les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens, donc $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$, ainsi

$$T(x) = T(y) \ ,$$

autrement dit

$$y = x \cdot T(y).$$

D'où $x = \frac{y}{T(y)}$ ce qui assure la surjectivité de ψ.

Montrons maintenant l'injectivité de l'application ψ :

Soient x_1 et x_2 dans B, tels que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$. On a alors les implications suivantes :

$$x_1 \cdot T(x_1) = x_2 \cdot T(x_2)$$

$$x_1 = x_2 \cdot \frac{T(x_2)}{T(x_1)}.$$

Donc x_1 et x_2 sont colinéaires et de même sens car $\frac{T(x_2)}{T(x_1)}$ est positif.

Par conséquent, $T(x_1) = T(x_2)$, d'où, en reprenant l'avant dernière égalité :

$$x_1 = x_2.$$

Ce qui achève la démonstration de l'injectivité de ψ.

Ainsi ψ est bijective de réciproque

$$\psi^{-1} : \left| \begin{array}{ccl} L & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{T(x)} & \text{si } x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}^n} & \text{si } x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases} \end{array} \right. .$$

---

4. On s'intéresse à la continuité de ψ et de ψ^{-1}.

— Il est clair que ces deux applications sont continues en $0_{\mathbb{R}^n}$.

— Leur continuité en un autre point de $0_{\mathbb{R}^n}$ est alors assurée par celle de l'application T.

Ainsi, ψ est un homéomorphisme de B dans L et φ est un homéomorphisme de K dans L. On peut ainsi conclure que pour tout K compact convexe d'intérieur non vide, K et la boule unitaire B sont homéomorphes.

□

Définition 14. *Diamètre de triangulation*

Soient $\mathcal{S}_n$ un n-simplexe dans l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d_E)$, où d_E est la distance euclidienne, et $\mathcal{T} = (T_i)_{i \in I}$ une triangulation sur $\mathcal{S}_n$.

On appelle *diamètre de la triangulation* $\mathcal{T}$ la quantité

$$diam(\mathcal{T}) = \sup_{T_i \in \mathcal{T}} \left(\sup_{(x,y) \in \widehat{T_i}^2} (d_E(x,y)) \right).$$

Notons que $diam\,(\mathcal{T})$ est fini étant donné que le nombre d'arêtes de $\mathcal{T}$ est fini.

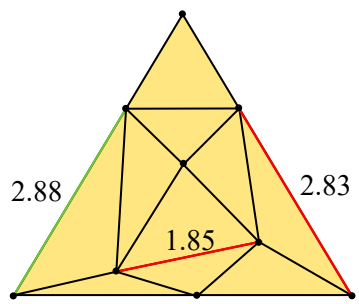


Figure 2.5 — $diam\,(\mathcal{T}) = 2.88$, c'est la plus grande arête de tous les T_i.

Définition 15. *Barycentre*

Soient $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une famille de points de $\mathbb{R}^m$ et $(\lambda_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une famille de réels.

On appelle alors *barycentre* des points $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ pondérés par les $(\lambda_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ le point p vérifiant la condition suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{px_i} = 0$$

On notera également que si $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{px_i} = 0 &\iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot (x_i - p) = 0 \\
&\iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot p = 0 \\
&\iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \\
&\iff p \cdot \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \\
&\iff p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i.
\end{aligned}$$

Définition 16. *Combinaison convexe*

Soit $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une famille finie de points de $\mathbb{R}^m$, on dit qu'un point p de $\mathbb{R}^m$ est une *combinaison convexe* des $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ s'il existe une famille de réels $(\lambda_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ avec pour tout i dans $[\![0;n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ de sorte que p soit le barycentre des $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ pondérés par les $(\lambda_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$.

Proposition.

Soit X une partie de $\mathbb{R}^m$, on a alors

$$X \text{ convexe} \iff X \text{ contient toute combinaison convexe de ses éléments.}$$

Preuve. (*Proposition*)

$\boxed{\Longleftarrow}$ X contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments donc il contient en particulier les combinaisons convexes de deux de ses éléments donc

$$\forall (x,y) \in X^2, \quad \forall (\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (\lambda_x + \lambda_y = 1 \text{ et } \lambda_x, \lambda_y \geq 0) \text{ on a :}$$

$$p = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y \in X.$$

Donc

$$\forall (x,y) \in X^2, \quad \forall \lambda_x \in [0,1], \text{ on a :}$$

$$p = \lambda_x \cdot x + (1-\lambda_x) \cdot y \in X.$$

Ainsi, X est convexe.

$\boxed{\Longrightarrow}$ X convexe donc X contient tous ses segments ie. toutes les combinaisons convexes de deux de ses éléments. Montrons par récurrence sur le nombre d'éléments de la combinaison convexe que X contient toutes les combinaisons convexes de tous ses éléments.

Pour $n \geq 2$, on définit la proposition suivante :

$$\mathcal{H}(k) : \text{« } X \text{ contient toutes les combinaisons convexes de } k \text{ de ses éléments »}.$$

$\boxed{\text{INITIALISATION}}$: Pour $k = 2$, $\mathcal{H}(k)$ a été vérifiée précédemment.

$\boxed{\text{HÉRÉDITÉ}}$: Soit $k \geq 2$, supposons $\mathcal{H}(k)$ vraie. Montrons $\mathcal{H}(k+1)$.

Soient $(x_i)_{i\in[\![1;k+1]\!]}$ une famille de $\mathbb{R}^m$ et $(\lambda_i)_{i\in[\![1;k+1]\!]}$ une famille de réels tels que

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in [\![1;k+1]\!] \text{ et } \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1.$$

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i \cdot x_i$. Montrons que $x \in X$.

S'il existe $i \in [\![1;k+1]\!]$ tel que $x = x_i$ alors $x \in X$.

Sinon, il existe $i \in [\![1;k+1]\!]$ tel que $\lambda_i < 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_{k+1} < 1$.

Alors

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i \cdot x_i) + \lambda_{k+1} \cdot x_{k+1}$$

$$x = (1-\lambda_{k+1}) \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i \cdot x_i}{1-\lambda_{k+1}} \right) + \lambda_{k+1} \cdot x_{k+1}.$$

Posons $y = \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i \cdot x_i}{1-\lambda_{k+1}} \right)$, alors

$$x = (1-\lambda_{k+1}) \cdot y + \lambda_{k+1} \cdot x_{k+1}.$$

Reste à présent à montrer que y appartient à X, en effet, si $y \in X$, comme on a également $x_{k+1} \in X$, la convexité de X nous permettra de conclure que $x \in X$.

On pose pour i dans $[\![1;k]\!]$ $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} \geq 0$, alors

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i \cdot x_i \ ,$$

et

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda'_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-\lambda_{k+1}} = 1.$$

Donc y est une combinaison convexe de k éléments de X donc par l'hypothèse de récurrence, y appartient à X ; et on a ainsi x appartient à X.

$\boxed{\text{CONCLUSION}}$: On a ainsi montré que pour tout $k \geq 2$, X contient toutes les combinaisons convexes de k de ses éléments. Autrement dit, X contient toutes les combinaison convexes de ses éléments.

On a par conséquent l'équivalence

$$X \text{ convexe} \iff X \text{ contient toute combinaison convexe de ses éléments.}$$

□

Corolaire.

Soit $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une famille de points de $\mathbb{R}^m$, alors l'enveloppe convexe de la famille de points $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est égale à l'ensemble des combinaisons convexes des $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$; autrement dit,

$$Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right) = \left\{p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \in \mathbb{R}^m \ \ / \ \ \forall i \in [\![0;n]\!], \ \ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

Preuve. (*Proposition*)

On va montrer l'équivalence précédente par double inclusion. Soit $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une famille de points de $\mathbb{R}^m$, notons

$$A = \left\{p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \in \mathbb{R}^m \ \ / \ \ \forall i \in [\![0;n]\!], \ \ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

$\boxed{\subset}$: Il s'agit de montrer que A est convexe. Soient p et q dans A, et λ dans $[0;1[$.

Il existe ainsi deux familles de réels $(\mu_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $(\nu_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$,

avec, pour tout i de $[\![0;n]\!]$,

$$\mu_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1,$$

$$\nu_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \nu_i = 1,$$

et telles que

$$p = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \cdot x_i \quad \text{ et } \quad q = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \cdot x_i.$$

Considérons à présent le point $r = \lambda \cdot p + (1-\lambda) \cdot q$ sur le segment $[pq]$,

on a alors :

$$\begin{aligned} r &= \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} (\mu_i \cdot x_i) + (1-\lambda) \cdot \sum_{i=0}^{n} (\nu_i \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot \mu_i \cdot x_i) + \sum_{i=0}^{n} ((1-\lambda) \cdot \nu_i \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot \mu_i \cdot x_i + (1-\lambda) \cdot \nu_i \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} ((\lambda \cdot \mu_i + (1-\lambda) \cdot \nu_i) \cdot x_i) . \end{aligned}$$

Pour i dans $[\![0;n]\!]$, on pose $\xi_i = \lambda \cdot \mu_i + (1-\lambda) \cdot \nu_i$, alors

$$r = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \cdot x_i.$$

Soit i dans $[\![0;n]\!]$, on a :

$$\lambda \geq 0 \quad ; \quad (1-\lambda) \geq 0 \quad ; \quad \mu_i \geq 0 \quad ; \quad \nu_i \geq 0.$$

Donc

$$\xi_i = \lambda \cdot \mu_i + (1-\lambda) \cdot \nu_i \geq 0, \quad \forall i \in [\![0;n]\!].$$

Calculons à présent la somme des ξ_i, on a les égalités successives suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \xi_i &= \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot \mu_i + (1-\lambda) \cdot \nu_i) \\ &= \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \mu_i}_{=1} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \nu_i}_{=1} \\ &= \lambda + (1-\lambda) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$r = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \cdot x_i,$$

avec, pour tout i de $[\![0;n]\!]$,

$$\xi_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \xi_i = 1.$$

Donc r appartient à A, quelque soient p et q de A et λ de $[0;1[$, ie. l'ensemble A est convexe.

Or A contient la famille de points $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right)$ est le plus petit ensemble convexe contenant la famille $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$,

donc $Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right) \subset A$.

$\boxed{\supset}$: L'ensemble $Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right)$ est convexe de par sa définition. La proposition précédente nous permet donc d'affirmer que $Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right)$ contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Donc en particulier, du fait que $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]} \subset Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right)$, $Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right)$ contient toutes les combinaisons convexes des $n+1$ éléments de la famille $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$.

Ainsi, on a

$$Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right) \supset \left\{p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \in \mathbb{R}^m \ \ / \ \ \forall i \in [\![0;n]\!], \ \ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

On a par conséquent l'égalité

$$Conv\left((x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\right) = \left\{p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \in \mathbb{R}^m \ \ / \ \ \forall i \in [\![0;n]\!], \ \ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

□

Définition 17. *Simplexe canonique*

Soit n dans $\mathbb{N}$, on se place dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de sa base canonique $(e_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$.

On appelle alors n-simplexe canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ le n-simplexe

$$S_n = [e_i]_{i\in[\![0;n]\!]}$$

engendré par les points de la base canonique.

On peut alors noter l'égalité qui suit :

$$S_n = \left\{p = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \ \ / \ \ \forall i \in [\![0;n]\!], \ \ x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\right\},$$

autrement dit,

$$S_n = \left\{ (x_i)_{i\in[\![0;n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1} \ \ / \ \ \forall i \in [\![0;n]\!], \ \ x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

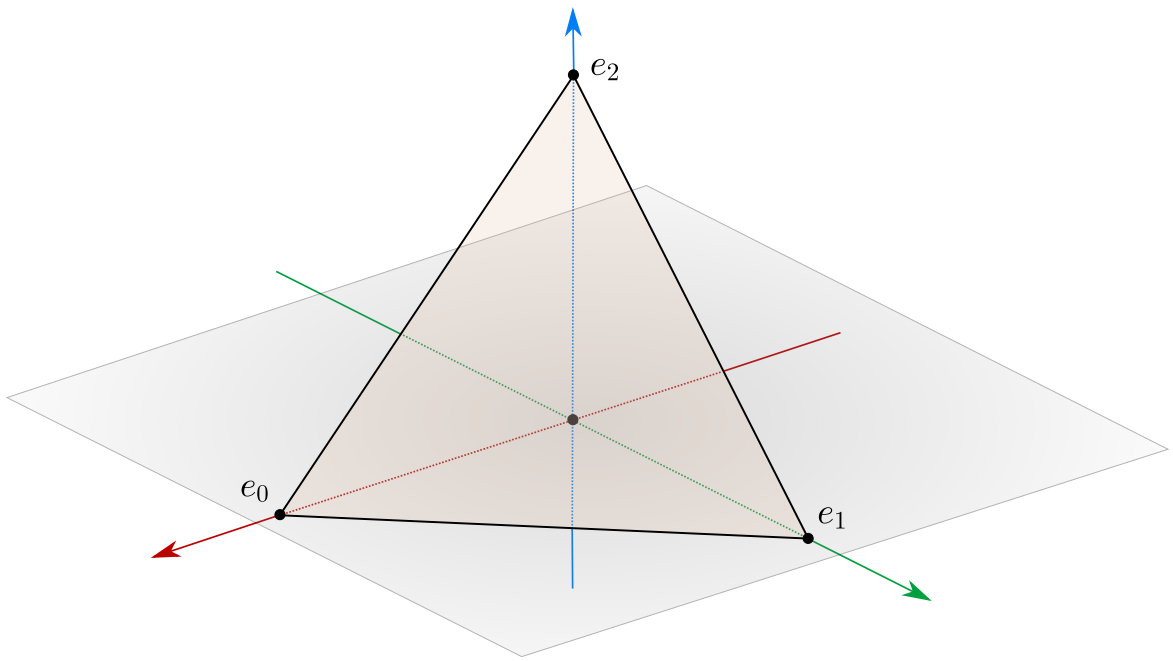


Figure 2.6 — Représentation du 2-simplexe canonique S_2 de $\mathbb{R}^3$.

On peut également écrire

$$S_n = (\mathbb{R}_+)^{n+1} \ \cap \ \overline{\mathcal{B}_1(0,1)}. \quad ^{4}$$

On remarquera que S_n est borné étant donné qu'il est contenu dans $\overline{\mathcal{B}_1(0,1)}$, de plus $\overline{\mathcal{B}_1(0,1)}$ et $(\mathbb{R}_+)^{n+1}$ sont fermés dans $\mathbb{R}^{n+1}$ donc S_n est fermé dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ainsi, S_n est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$. Il est de plus convexe et non vide, il satisfait donc aux conditions du théorème de Brouwer.

4. $\overline{\mathcal{B}_1(0,1)}$ représente la boule fermée centrée et de rayon 1 pour la norme 1

2.3 Démonstration du théorème de Brouwer

Au cours de la section précédente, nous avons reformulé en page 22 le théorème de Brouwer de la sorte :

Tout compact convexe d'intérieur non vide possède la propriété du point fixe de Brouwer.

Par ailleurs, nous avons également vu que la propriété du point fixe de Brouwer est topologique — ie. stable par homéomorphisme — que tout compact convexe d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule unité fermée, et, par transitivité de la relation *homéomorphe*, que tous les compacts convexes d'intérieur non vide et de même dimension sont homéomorphes entre eux.

À partir de ces résultats préliminaires, il sera donc suffisant, pour démontrer le théorème de Brouwer, de montrer qu'il existe un compact convexe d'intérieur non vide possédant la propriété du point fixe de Brouwer ; laquelle, une fois établie, se propagera par homéomorphisme sur tous les compacts convexes d'intérieur non vide de même dimension.

Soit donc n dans $\mathbb{N}$, nous allons ainsi nous placer sur le simplexe canonique S_n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Il s'agit à présent de montrer que pour toute application f continue de S_n dans S_n, f admet au moins un point fixe.

Preuve. (*Théorème du point fixe de Brouwer sur le simplexe canonique*)

Soit f une application continue de S_n dans S_n.

Par l'absurde, supposons que f n'admette aucun point fixe. Autrement dit, le vecteur $f(x) - x$ est non nul quelque soit x dans S_n.

On note par la suite p_i la projection canonique sur la $i^{\text{ème}}$ coordonnée pour i dans $[\![0; n]\!]$.

Soit x dans S_n, étant donné que x et $f(x)$ sont dans S_n,

$$0 \leq p_i(x) \leq 1$$

et

$$0 \leq p_i(f(x)) \leq 1$$

donc, par linéarité de la projection,

$$-1 \leq p_i(f(x) - x) \leq 1.$$

Pour i dans $[\![0; n]\!]$, on définit ainsi les applications continues

$$\pi_i : \left| \begin{array}{rcl} S_n & \longrightarrow & [-1; 1] \\ x & \longmapsto & p_i(f(x) - x). \end{array} \right.$$

On pose $O_i = \pi_i^{-1}([-1;0[)$. On remarque que $[-1;0[$ est un ouvert de $[-1;1]$ et donc, par continuité des applications π_i, les ensembles O_i sont ouverts.

Montrons que $S_n = \bigcup_{i\in[\![0;n]\!]} O_i$.

En effet, soit x dans S_n,

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(f(x)-x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(f(x)) - \sum_{i=0}^{n} p_i(x) = 1-1=0.$$

Or les $p_i(f(x)-x)$ sont non tous nuls car il n'y a pas de point fixe par hypothèse. Donc il existe au moins un i et un j de $[\![0;n]\!]$ pour lesquels $p_i(f(x)-x)$ est strictement positif et $p_j(f(x)-x)$ est strictement négatif et dans ce cas, x appartient à O_j.

Ainsi, pour tout x dans S_n, il existe j dans $[\![0;n]\!]$ tel que x appartient à O_j, ie. $S_n = \bigcup_{i\in[\![0;n]\!]} O_i$.

Montrons que $\bigcap_{i\in[\![0;n]\!]} \overline{O_i} = \varnothing$.

On a $\bigcap_{i\in[\![0;n]\!]} \pi_i^{-1}([-1;0]) = \varnothing$ car s'il existait un x de S_n tel que $\pi_i(x) \leq 0$ pour tout i de $[\![0;n]\!]$, étant donné que $\sum_{i=0}^{n} \pi_i(x) = 0$, on aurait $\pi_i(x) = 0$ pour tout i, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $\bigcap_{i\in[\![0;n]\!]} \pi_i^{-1}([-1;0]) = \varnothing$.

De plus, pour tout i dans $[\![0;n]\!]$, $O_i \subset \pi_i^{-1}([-1;0])$.

Donc $\bigcap_{i\in[\![0;n]\!]} \overline{O_i} = \varnothing$.

Soient I une partie de $[\![0;n]\!]$, et x dans $[e_i]_{i\in I}$ la sous-face engendrée par les e_i pour i dans I. Montrons que x appartient à $\bigcup_{i\in I} O_i$.

Soit j dans $J = [\![0;n]\!] \setminus I$, supposons que x appartienne à O_j, alors

$$\pi_j(x) < 0$$

donc

$$p_j(f(x)-x) < 0$$

d'où

$$p_j(f(x)) - p_j(x) < 0.$$

Or $x \in [e_i]_{i\in I}$ donc $x = \sum_{i\in I} (p_i(x) \cdot e_i) + \sum_{j\in J} (0 \cdot e_j)$. Donc $p_j(x) = 0$ pour tout j de J.

Ainsi, on a $p_j(f(x)) < 0$ pour tout j de J. Or $f(x)$ appartient à S_n et par la définition du simplexe canonique, $p_j(f(x)) \geq 0$ pour tout j de $[\![0;n]\!]$. Ce qui est absurde.

Donc

$$\forall j \in J, \quad x \notin O_j.$$

Or x appartient à $S_n = \bigcup_{i\in[\![0;n]\!]} O_i$, donc

$$\exists i \in I \ \ / \ \ x \in O_i.$$

On peut alors définir l'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & [\![0;n]\!] \\ x & \longmapsto & \inf\limits_{i\in[\![0;n]\!]} \{x \in O_i\}. \end{array} \right.$$

Cette application est bien définie étant donné que $S_n = \bigcup_{i\in[\![0;n]\!]} O_i$. Notons qu'il suffit de prendre un des i de $[\![0;n]\!]$ tel que x appartient à O_i ; de façon arbitraire, nous choisissons de prendre l'inf. .

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de S_n, considérons la restriction φ de Φ à $\widehat{\mathcal{T}}$,

$$\varphi = \Phi_{|\widehat{\mathcal{T}}} : \widehat{\mathcal{T}} \longrightarrow [\![0;n]\!].$$

Pour toute partie I de $[\![0;n]\!]$, grâce au fait que pour tout x de $[e_i]_{i\in I}$,

$$\exists i \in I \ \ / \ \ x \in O_i \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![0;n]\!] \setminus I, \quad x \notin O_j,$$

on a

$$\varphi\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [e_i]_{i\in I}\right) \subset \Phi\left([e_i]_{i\in I}\right) \subset I.$$

D'autre part, soit i dans $[\![0;n]\!]$, en utilisant le fait que $\{e_i\} = [e_i]$ on a

$$e_i \in O_i \text{ et } \forall j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\}, e_i \notin O_j.$$

Donc pour tout i de $[\![0;n]\!]$, $\varphi(e_i) = i$, et ainsi,

$$i = \varphi(e_i) \in \varphi\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [e_i]_{i\in I}\right).$$

Autrement dit, $I \subset \varphi\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [e_i]_{i\in I}\right)$.

On a par conséquent montré que

$$\forall I \in P\left(\llbracket 0;n \rrbracket\right), \quad \varphi\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [e_i]_{i\in I}\right) = I,$$

ie. pour toute triangulation $\mathcal{T}$, l'application φ est une *fonction de coloriage de Sperner*.

Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de triangulations de S_n telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}^\star, \quad diam\left(\mathcal{T}_i\right) < \frac{1}{i}.$$

Alors pour tout i de $\mathbb{N}^\star$, le lemme Sperner nous assure qu'il existe au moins un simplexe T_i de $\mathcal{T}_i$ marqué par l'application φ, ce qui nous permet de créer une suite $(T_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ de simplexes marqués.

Pour i dans $\mathbb{N}^\star$ et pour j dans $\llbracket 0;n \rrbracket$, on pose alors $a_{j,i}$ l'unique point de $\widehat{T_i}$ tel que $\varphi\left(a_{j,i}\right) = j$.

On a donc $n+1$ suites $(a_{j,i})_{i\in\mathbb{N}^\star}$ de points de S_n qui est compact.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on a donc qu'il existe une sous-suite $(a_{0,i_k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ convergente, ie.

$$\exists \ell \in S_n \ \ / \ \ \ell = \lim_{k\to+\infty} a_{0,i_k}.$$

Montrons à présent que pour tout j de $\llbracket 1;n \rrbracket$ la suite $(a_{j,i_k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et de limite ℓ.

Soit donc j dans $\llbracket 1;n \rrbracket$, on a par la définition du diamètre de triangulation, pour tout k de $\mathbb{N}^\star$

$$d_E\left(a_{j,i_k} \ ; \ a_{0,i_k}\right) \leq diam\left(T_{i_k}\right) < \frac{1}{i_k},$$

d'où

$$\lim_{k\to+\infty} d_E\left(a_{j,i_k} \ ; \ a_{0,i_k}\right) = 0.$$

Or

$$\lim_{k\to+\infty} a_{0,i_k} = \ell,$$

donc la limite de a_{j,i_k} existe et

$$\forall j \in \llbracket 0;n \rrbracket, \quad \lim_{k\to+\infty} a_{j,i_k} = \ell.$$

Soit j dans $\llbracket 0;n \rrbracket$, on a a_{j,i_k} appartient à O_j quelque soit k dans $\mathbb{N}^\star$ puisque $\varphi\left(a_{j,i_k}\right) = j$, donc ℓ appartient à $\overline{O_j}$ pour tout j de $\llbracket 0;n \rrbracket$, autrement dit,

$$\ell \in \bigcap_{j \in [\![0;n]\!]} O_j.$$

Ce qui est impossible puisque $\bigcap_{j \in [\![0;n]\!]} O_j$ est vide.

Ainsi l'hypothèse selon laquelle l'application f n'admet pas de point fixe est erronée, ce qui nous permet de conclure la démonstration : toute application continue de S_n dans S_n possède au moins un point fixe.

□

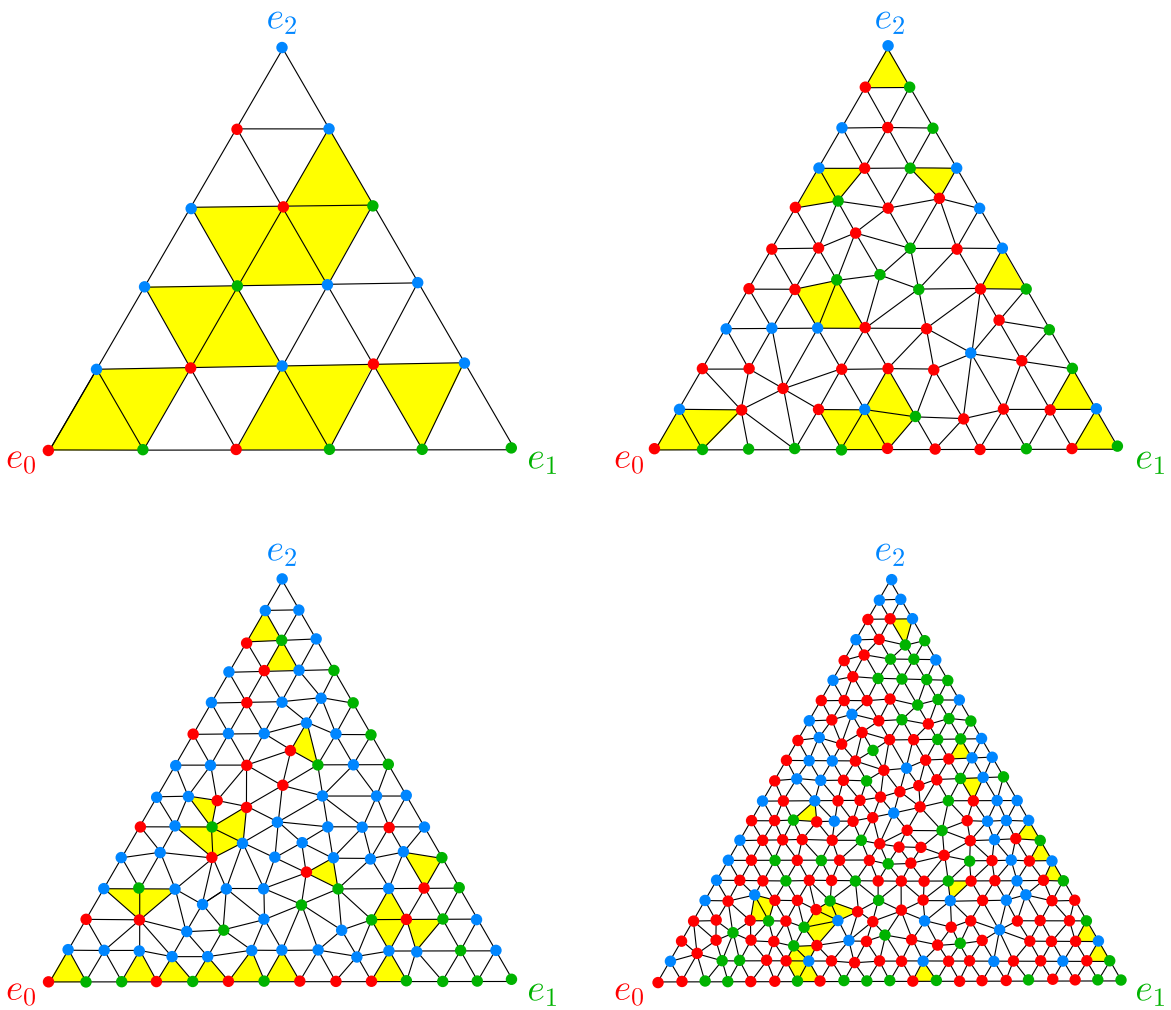


Figure 2.7 — Les premiers termes de la suite de triangulations $(\mathcal{T}_i)_{i \in \mathbb{N}^\star}$ et les simplexes marqués qu'elles engendrent.

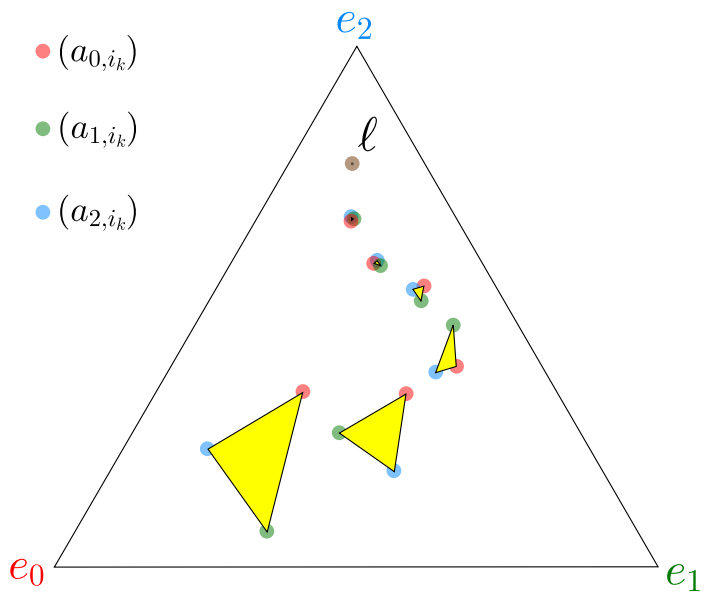


Figure 2.8 — Les suites extraites a_{0,i_k}, a_{1,i_k}, a_{2,i_k} convergent toutes vers le point limite ℓ.

Chapitre 3

Problèmes de partage

Les problèmes de partage consistent à répartir une ressource de façon équitable entre n personnes – où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un partage est dit *sans jalousie* lorsqu'aucun des participants ne souhaiterait recevoir la part d'un autre davantage que la sienne. Dans ce cas, on dit que le joueur *préfère* sa part. Un participant peut préférer plusieurs parts, ses préférences dépendent de la découpe et sont indépendantes des préférences des autres participants.

On s'intéressera ici au partage d'un gâteau.

Par soucis de cohérence, on prendra dans ce chapitre (e_1, e_2, e_3) pour noter la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.1 Partage sans jalousie d'un gâteau

Soient n personnes souhaitant partager un gâteau rectangulaire. On pose les hypothèses suivantes :

— $n-1$ couteaux coupent le gâteau parallèlement à ses bords verticaux. Les découpes sont arbitraires et ne dépendent pas des goûts et préférences des joueurs.

— La taille totale du gâteau égale 1 [1]. Pour i dans $[\![1;n]\!]$, on note x_i la taille de la $i^{\text{ème}}$ part. On a donc $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, et $x_i \geq 0$ pour tout i, ce qui nous permet alors d'associer l'ensemble des découpes possibles au $(n-1)$-simplexe canonique S_n de $\mathbb{R}^n$.

— Ces n personnes n'ont pas forcément les mêmes goûts et ont *faim* ie. ils préféreront toujours au moins une part parmi les n disponibles et une part de taille non nulle sera toujours préférée à une part de taille nulle.

— L'ensemble des préférences d'un joueur est fermé : pour toute suite convergente de parts préférées par un des participants, la part limite lui convient toujours.

1. On mesure en fait la taille des parts relativement à celle du gâteau, ce qui nous permet de travailler avec des grandeurs adimensionnées.

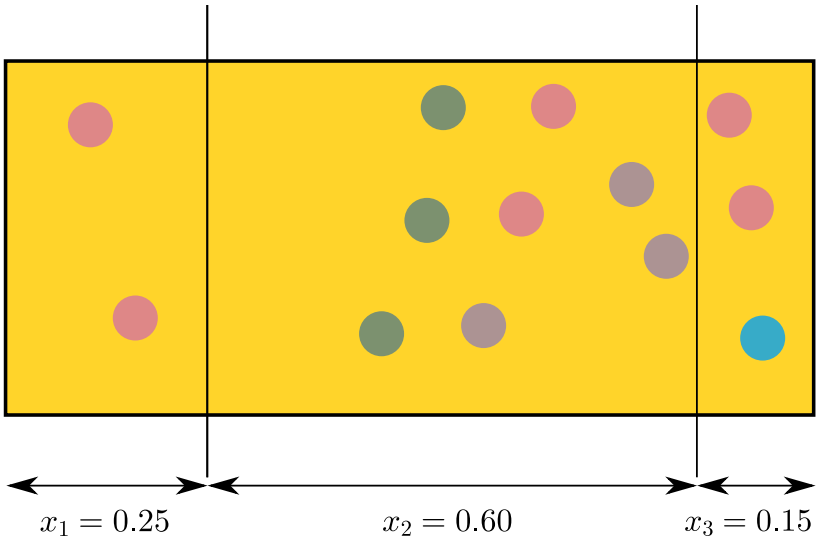


Figure 3.1 — Exemple d'une découpe de gâteau.

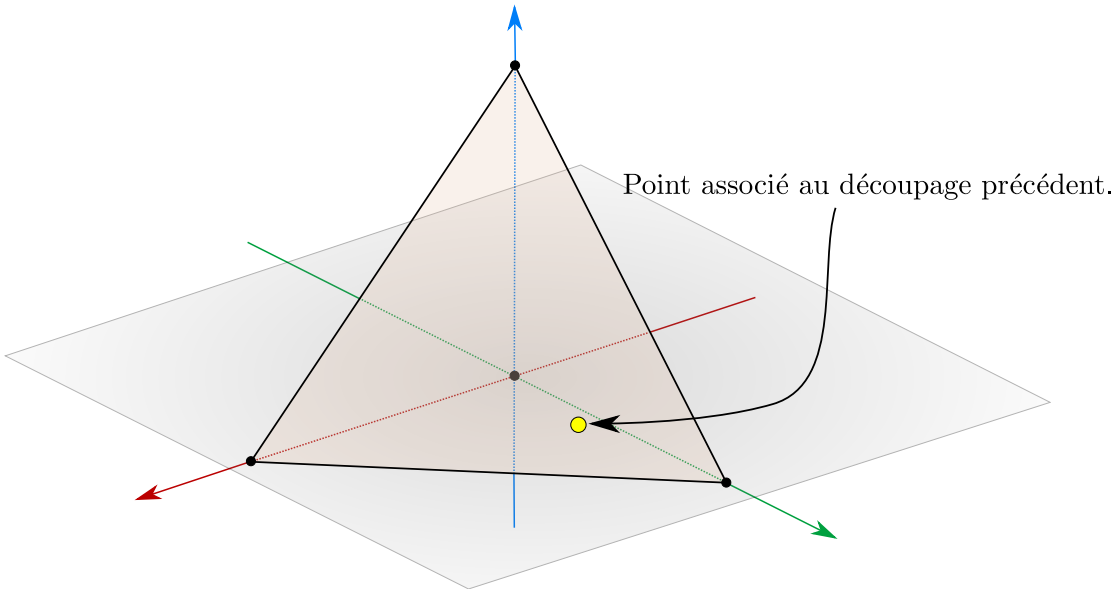


Figure 3.2 — On fait correspondre à cette découpe un point de S_3.

Théorème 2. *Partage sans jalousie*

Il existe un partage sans jalousie du gâteau entre les n joueurs, ie. il existe une découpe et une distribution des parts telles que chaque joueur est satisfait de la part qui lui est attribué.

Démontrons le cas $n = 3$,

Nous avons donc trois joueurs – Aladin, Blanche-Neige et Cendrillon – et deux couteaux qui coupent le gâteau en trois parts de taille x_1, x_2 et x_3 avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, et $x_i \geq 0$ pour tout i de $[\![1;3]\!]$.

L'ensemble des découpages possibles est associé au 2-simplexe canonique S_3.

Soit $\mathcal{T} = (T_i)_{i \in I}$ une triangulation de S_3. À chaque points de $\widehat{\mathcal{T}_i}$ on attribue une des étiquettes A, B ou C [2] de sorte que chaque triangle de la triangulation possède ses trois sommets étiquetés respectivement A, B et C.

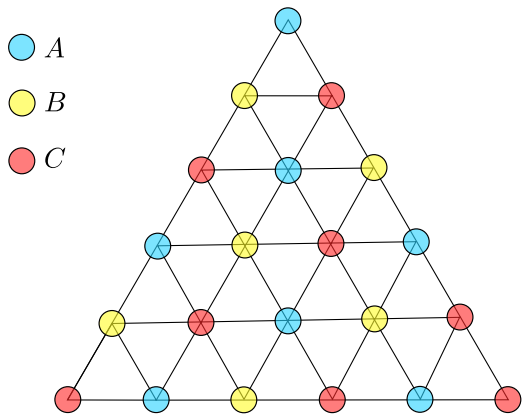


Figure 3.3 — Étiquetage d'une triangulation régulière respectant la condition annoncée précédemment.

On admettra pour la suite que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver une triangulation de S_3 de diamètre inférieur à ϵ vérifiant cette condition d'étiquetage.

Chaque point de la triangulation correspond à un découpage du gâteau. On peut donc, pour chaque point de $\widehat{\mathcal{T}}$, demander à son propriétaire ie. le joueur parmi A, B ou C qui est étiqueté sur ce point, quelle part de cette découpe il préfère.

On note ce choix 1, 2 ou 3 suivant s'il choisit la première, la deuxième, ou la troisième part ; et on appelle f l'application de $\widehat{\mathcal{T}}$ dans $[\![1;3]\!]$ qui a chaque point de $\widehat{\mathcal{T}}$ associe le choix que fait le joueur étiqueté en ce point.

On remarque alors que f est une fonction de coloriage de Sperner. En effet,

— sur les sommets du simplexe, le gâteau est découpé en une seule part, les deux autres sont de taille nulle. Les joueurs ont *faim* par hypothèse ; quand on leur demande de choisir, ils prennent donc la seule part qui n'est pas de taille nulle.

2. A comme Aladin, B comme Blanche-Neige et C comme Cendrillon

Sur $e_1 = (1, 0, 0)$, le joueur choisit ainsi la première part et par conséquent

$$f(e_1) = f((1, 0, 0)) = 1.$$

Par le même principe,

$$f(e_2) = f((0, 1, 0)) = 2$$

et

$$f(e_3) = f((0, 0, 1)) = 3.$$

— Sur les points situés sur les arêtes de S_3, le gâteau est coupé en deux parts, la dernière est de taille nulle. En réutilisant l'hypothèse selon laquelle les joueurs ont *faim*, on peut alors affirmer que le choix du joueur étiqueté se portera assurément sur l'une des deux parts de taille non nulle.

Sur l'arête $[e_1 e_2]$, les points rencontrés sont de la forme $(x_1, x_2, 0)$. Par conséquent, le participant choisit soit la première, soit la deuxième mais jamais la troisième car elle est de taille nulle et qu'il a faim. On a ainsi

$$f\left([e_1 e_2] \cap \widehat{\mathcal{T}}\right) = \{1; 2\}.$$

De même,

$$f\left([e_2 e_3] \cap \widehat{\mathcal{T}}\right) = \{2; 3\}$$

et

$$f\left([e_1 e_3] \cap \widehat{\mathcal{T}}\right) = \{1; 3\}.$$

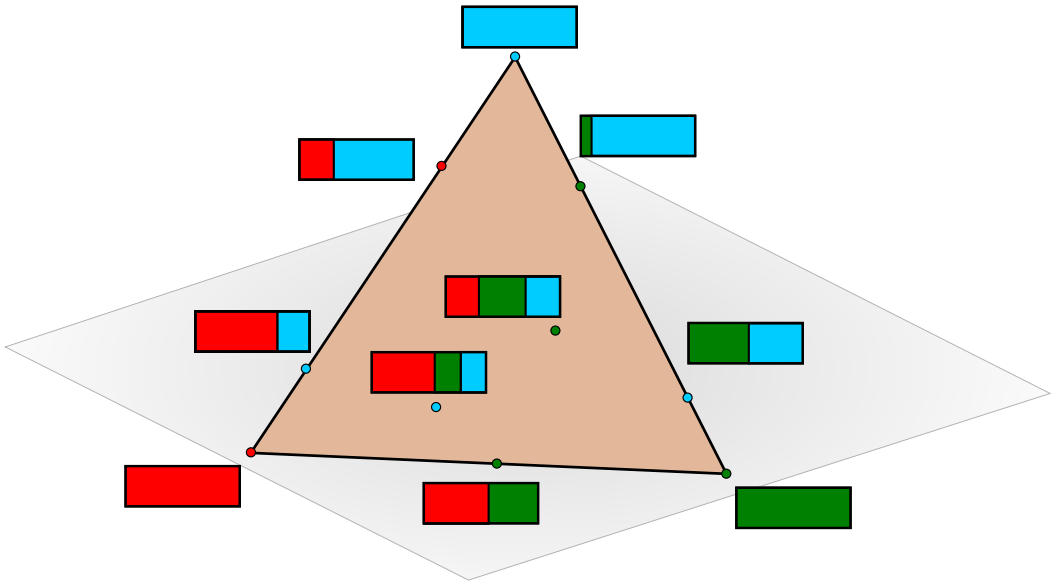


Figure 3.4 — Quelques découpages et leur point associés sur S_3, x_1 est la partie rouge, x_2 est la partie verte et x_3 est la partie bleue.

Ainsi, on a bien

$$\forall I \in P\left([\![1;3]\!]\right), \quad f\left(\widehat{\mathcal{T}} \cap [e_i]_{i\in I}\right) = I$$

donc f est une fonction de coloriage de Sperner.

Ainsi, d'après le lemme de Sperner, on peut affirmer qu'il existe au moins un triangle de $\mathcal{T}$ marqué, ie. un triangle T_i de $\mathcal{T}$ dont l'image des sommets par f est $[\![1;3]\!]$.

En réitérant l'expérience avec une suite de triangulations $(\mathcal{T}_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ de plus en plus fines [3], on crée une suite de triangles marqués. Pour j dans $[\![1;3]\!]$, si l'on note $(a_{ji})_{i\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de sommets de ces triangles marqués dont l'image par f est j, on a, par le théorème de Bolzano-Weierstrass et en utilisant la compacité de S_3, l'existence une sous-suite $(a_{1i_k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ convergente vers un point limite qu'on notera ℓ.

Du fait que les diamètres des triangulations de la sous-suite $(\mathcal{T}_{i_k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ tendent vers 0, on a également que les sous-suites $(a_{2i_k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ et $(a_{3i_k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers ℓ.

L'ensemble des préférences de chaque joueur étant fermé, le point ℓ correspond donc à un découpage pour lequel tous les joueurs préfèrent une part différente, ie. c'est un partage sans jalousie.

□

Dans la pratique, il n'est pas toujours nécessaire d'aller chercher le point limite pour satisfaire à tous les joueurs. En effet, étant donné de la continuité de la mesure des parts, il suffit de prendre une triangulation suffisamment fine pour que la distinction entre les points ℓ, a_{1i_k}, a_{2i_k} et a_{3i_k} soit indiscernable par les joueurs.

Il est alors intéressant de pouvoir résoudre concrètement un tel problème de partage au moyen d'un algorithme ϵ-approximatif.

---

3. de diamètre inférieur à $\frac{1}{i}$ par exemple

3.2 Résolution algorithmique d'un partage de gâteau

Dans cette section on discutera d'un algorithme qui nous permettra résoudre un problème de partage d'un gâteau entre trois personnes à près.

3.2.1 Position du problème

Soit un gâteau de taille 1 comme vu précédemment, et supposons qu'il soit composé de trois parfums :

— le premier tiers du gâteau est à la *rhubarbe*,

— le deuxième tiers est à la *vanille*,

— et le troisième tiers est au *bleuet*.

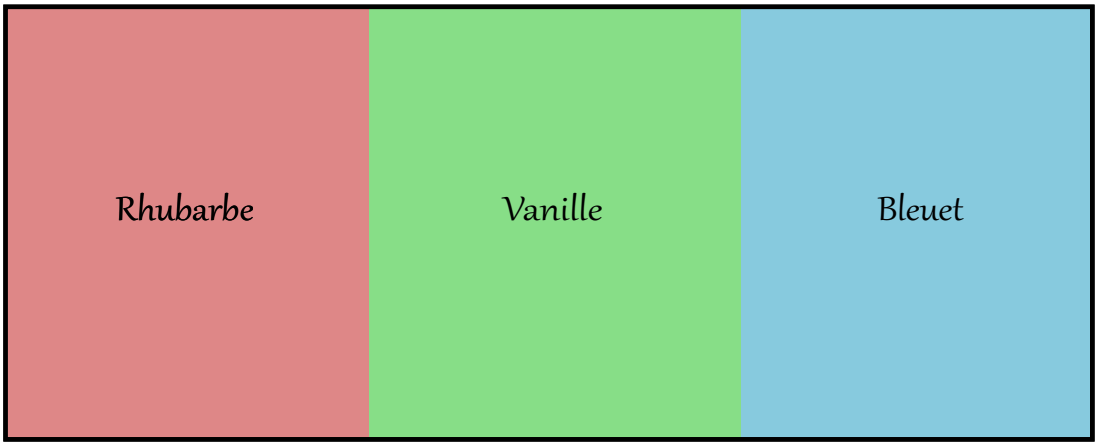


Figure 3.5 — Le gâteau rhubarbe-vanille-bleuet à partager entre les trois amis.

Aladin, Blanche-Neige et Cendrillon veulent se partager le gâteau sachant que

— Aladin est gourmand : il veut toujours *la plus grosse part*.

— Blanche-Neige veut *le plus de vanille et de bleuet*, et dans un cas d'égalité de quantité vanille-bleuet, elle choisit la plus grosse part.

— Cendrillon quant à elle veut *le plus possible de rhubarbe et de vanille* et dans un cas d'égalité de quantité rhubarbe-vanille, elle choisit aussi la plus grosse part.

On remarquera que les joueurs ont tous *faim*, de fait, on va pouvoir créer un étiquetage et une fonction de coloriage de Sperner.

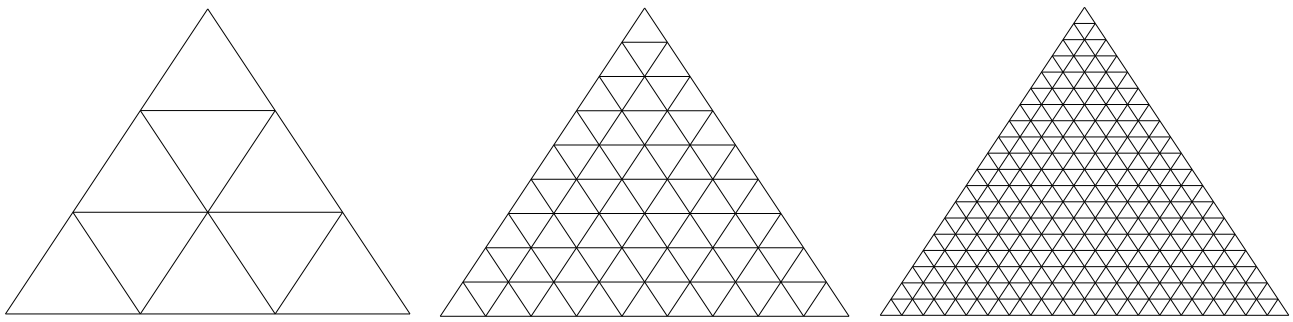
Il est inutile de vérifier que les ensembles de leurs préférences sont fermés étant donné qu'aucun passage à la limite ne sera effectué.

Le but de cet algorithme est donc de trouver un découpage pour lequel chacun de ces trois personnages trouvera son compte.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3.2.2 Conception et triangulation de S_3

Afin d'éviter les erreurs d'arrondi pouvant survenir sur des triangulations très fines, on a fait le choix de travailler sur le triangle dont les sommets sont $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$ et $(0, 0, n)$ plutôt que S_3. Il est aisé de revenir sur le simplexe canonique S_3 grâce à un facteur d'homothétie $\frac{1}{n}$, c'est pourquoi on fera comme si on travaillait directement sur S_3. La triangulation choisie est une triangulation régulière ie. composée de triangles équilatéraux tous identiques ; on a ainsi un diamètre de triangulation égal à $\frac{1}{n-1}$ qui nous permettra d'obtenir une triangulation aussi fine que l'on souhaite en faisant grandir n.



$n = 4$ $n = 10$ $n = 20$

Figure 3.6 — Création de la triangulation régulière de S_3.

3.2.3 Étiquettes des joueurs sur les points de la triangulation

Il est maintenant nécessaire d'étiqueter les points de la triangulation avec A, B et C de sorte que chaque triangle de la triangulation ait ses trois sommets étiquetés A, B et C.

Pour cela on étiquette A le sommet $(0, 0, 1)$ puis, en se déplaçant par pas de 1 suivant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on nomme les points B puis C, puis A, puis B, etc.

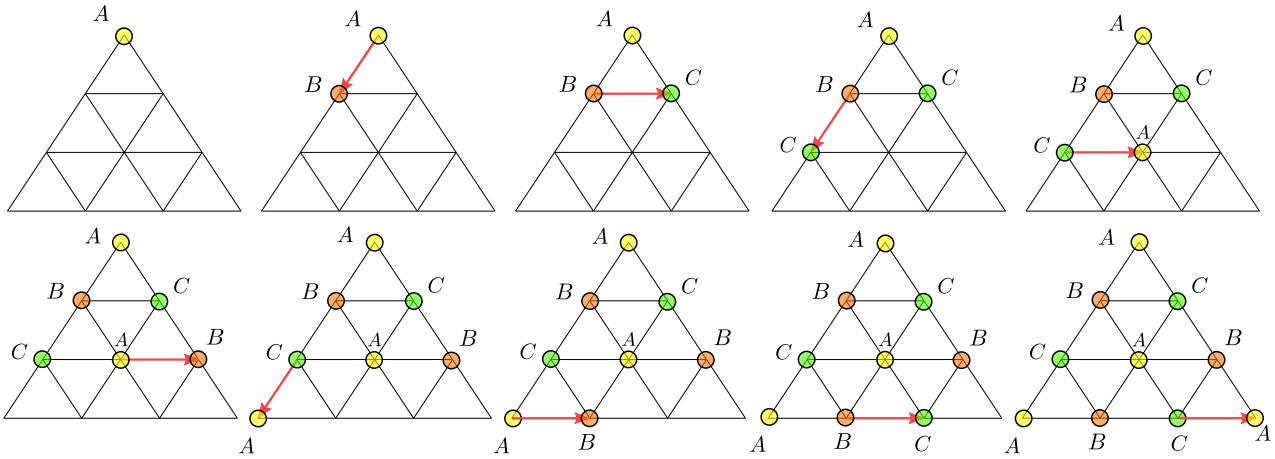


Figure 3.7 — Exemple de l'étiquetage pour $n = 4$.

Étant donné une triangulation de S_3, on crée ainsi la fonction *étiquette* qui a tout point (x, y, z) des sommets de cette triangulation associe

— A si $n - 1 + y - z$ est congru à 0 modulo 3.

— B si $n - 1 + y - z$ est congru à 1 modulo 3.

— B si $n - 1 + y - z$ est congru à 2 modulo 3.

3.2.4 Choix des joueurs face à une découpe

Il s'agit à présent d'implémenter dans l'algotithme les préférences des trois joueurs afin qu'il puisse faire un choix de part face à une découpe étiquetée donnée.

Étant donné une découpe, pour i dans $[\![1;3]\!]$ on appellera R_i, V_i, B_i les proportions de rhubarbe-vanille-bleuet dans la part i.

On se place sur un point (x, y, z) du simplexe canonique S_3. On va noter (x, y, z), $\mathcal{B}(x, y, z)$ et (x, y, z) les choix respectifs d'Aladin, Blanche-Neige et Cendrillon au point (x, y, z).

Choix d'Aladin

On rappelle qu'Aladin veut toujours la plus grosse part, on a donc

$$(x, y, z) = \min_{i \in [\![1;3]\!]} \left\{ i \ \ / \ \ R_i + V_i + B_i = \max_{j \in [\![1;3]\!]} \{R_j + V_j + B_j\} \right\}.$$

Choix de Blanche-Neige

Blanche-Neige veut le plus de vanille et de bleuet et en cas d'égalité, elle prend la plus grosse part.

On effectue les sommes $V_1 + B_1$, $V_2 + B_2$ et $V_3 + B_3$ et on prend le i de $[\![1;3]\!]$ pour lequel $V_i + B_i$ est maximale. S'il existe plusieurs i pour lesquels $V_i + B_i$, on prend celui pour lequel la somme $R_i + V_i + B_i$ est maximale, enfin, si dans ce cas, si les sommes $R_i + V_i + B_i$ ne permettent pas de choisir un unique i, on choisit le plus petit i parmi eux.

Choix de Cendrillon

Cendrillon veut le plus de rhubarbe et de vanille et en cas d'égalité, elle prend la plus grosse part.

Ce cas se traite de la même façon que celui de Blanche-Neige, il suffit juste d'échanger bleuet et rhubarbe.

3.2.5 Fonction de coloriage de Sperner

À présent qu'on a les sommets de la triangulation de S_3, l'étiquetage sur ces sommets et les fonctions de préférences des trois joueurs, on peut fabriquer la fonction de coloriage de Sperner qui leur est associée. On notera cette fonction $\mathit{Sperner}\,(x, y, z)$.

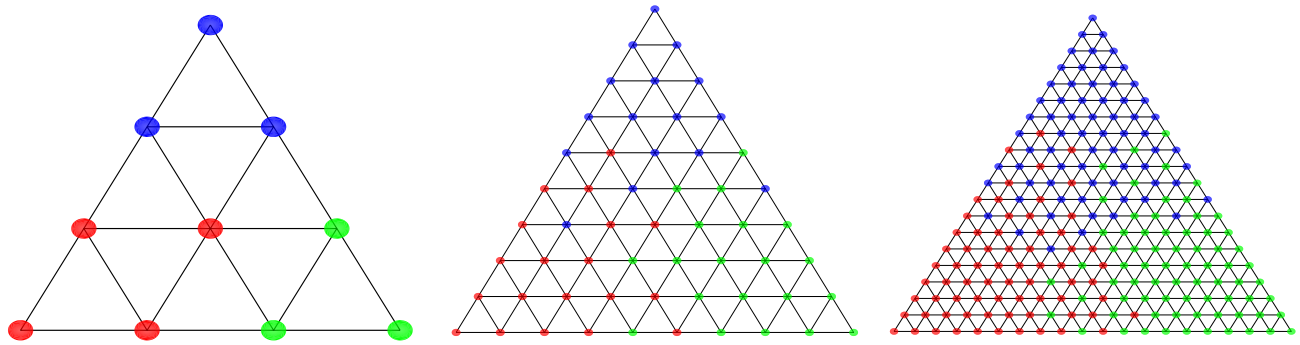
Il suffit alors d'attribuer au point (x, y, z) le choix que fait le joueur étiqueté en ce point :

— si l'étiquette de (x, y, z) est A, alors $\mathit{Sperner}\,(x, y, z) = (x, y, z)$,

— si l'étiquette de (x, y, z) est B, alors $\mathit{Sperner}\,(x, y, z) = \mathcal{B}\,(x, y, z)$

— Si l'étiquette de (x, y, z) est C, alors $\mathit{Sperner}\,(x, y, z) = (x, y, z)$.

On pourra s'assurer de la bonne position du problème en demandant un retour graphique à l'algorithme.



$n = 4$ $n = 10$ $n = 20$

Figure 3.8 — Mise en œuvre de la fonction de coloriage de Sperner sur les triangulations de la figure 3.6.

3.2.6 Recherche d'un triangle marqué

Pour trouver un triangle marqué, nous invitons tout d'abord le lecteur à relire la démonstration du lemme de Sperner en dimension 2 réalisée au chapitre 1.

Soit donc $\mathcal{G}$ le graphe dont les nœuds sont définis par les triangles de la triangulation et le complémentaire de S_3 dans $\mathbb{R}^3$ et les arêtes par la relation « partager un *segment de passage* dont l'image des deux extrémités par f est $\{1; 2\}$. ».

En notant E le nœud du complémentaire de S_3, d'après le lemme de Sperner en dimension 1, le dégré de E est impair.

On considère les plus longues chaînes simples partant de E, ie. les plus longues suites finies d'arêtes consécutives partant de E et ne passant pas deux fois par la même arête. Alors, comme le nombre d'arêtes est fini,

— soit la chaîne va boucler sur E, on lui impose dans ce cas de s'arrêter et elle va alors consommer deux arêtes partant de E.

— Soit la chaîne va s'arrêter sur un triangle de la triangulation. Comme les chaines sont supposées simples et les plus longues possibles, cela veut dire que ce triangle est nécessairement de degré 1, et on a vu qu'un triangle de degré 1 est nécessairement et suffisamment un triangle marqué. Ce deuxième type de chaîne ne va consommer qu'une seule arête partant de E.

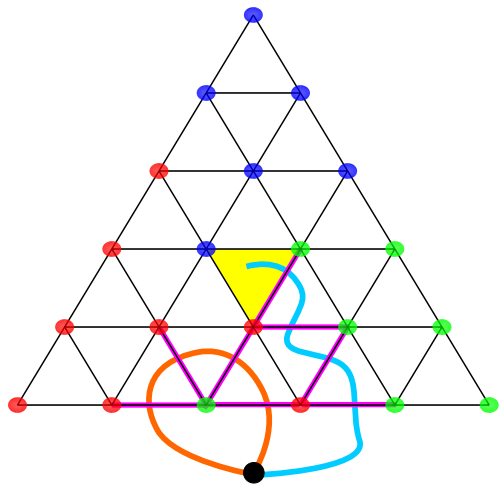


Figure 3.9 — On remarque ici les deux types de chaînes : en orange une chaîne bouclée, en bleu une chaîne aboutissant sur un triangle marqué.

Étant donné que le degré de E est impair, il est impossible qu'il n'y ait que des boucles, autrement dit, il existe au moins une chaîne qui aboutit sur un triangle marqué. [4]

Ainsi il nous suffira de faire parcourir à l'algorithme l'ensemble de ces chaînes et noter chaque triangle de degré 1.

On aurait également pu noter directement tous les triangles de degré 1 de la triangulation, mais le temps de calcul aurait été beaucoup plus long ; de plus pour notre problème, nous n'avons pas la nécessité de trouver *tous* les triangles marqués.

3.2.7 Indiçage des segments marqués sur le segment $[e_1e_2]$

On stocke l'ensemble des i de $[\![0;n-2]\!]$ tels que le segment $\left[\begin{pmatrix} i \\ n-i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+1 \\ n-i+1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ est marqué.

---

4. Ceci peut être considéré comme une démonstration du lemme de Sperner moins forte que celle menée au chapitre 1 ; en effet, on ne montre ici que l'existence d'un triangle marqué.

3.2.8 Boucle permettant de trouver un triangle marqué

Pour i dans l'ensemble des indices relevés précédemment,

on travaille avec trois points, S, T et U.

Au départ, on place les points S et T sur le segment marqué $\left[\begin{pmatrix} i \\ n-i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+1 \\ n-i+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$,

et le point U sur le troisième point du triangle de la triangulation.

Si $f(U) = 3$, le triangle est marqué, on note son barycentre et on passe au i suivant.

Tant que $f(U) \neq 3$ ou bien *que* la dernière coordonnée de U est non nulle,

— Si $f(U) = 3$, le triangle est marqué, on note son barycentre et on passe au i suivant.

— Sinon,

  — soit le segment $[SU]$ est marqué, alors on translate T par le vecteur $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{TU}$ et on échange T et U

  — soit le segment $[TU]$ est marqué, alors on translate S par le vecteur $\overrightarrow{US} + \overrightarrow{UT}$ et on échange S et U.

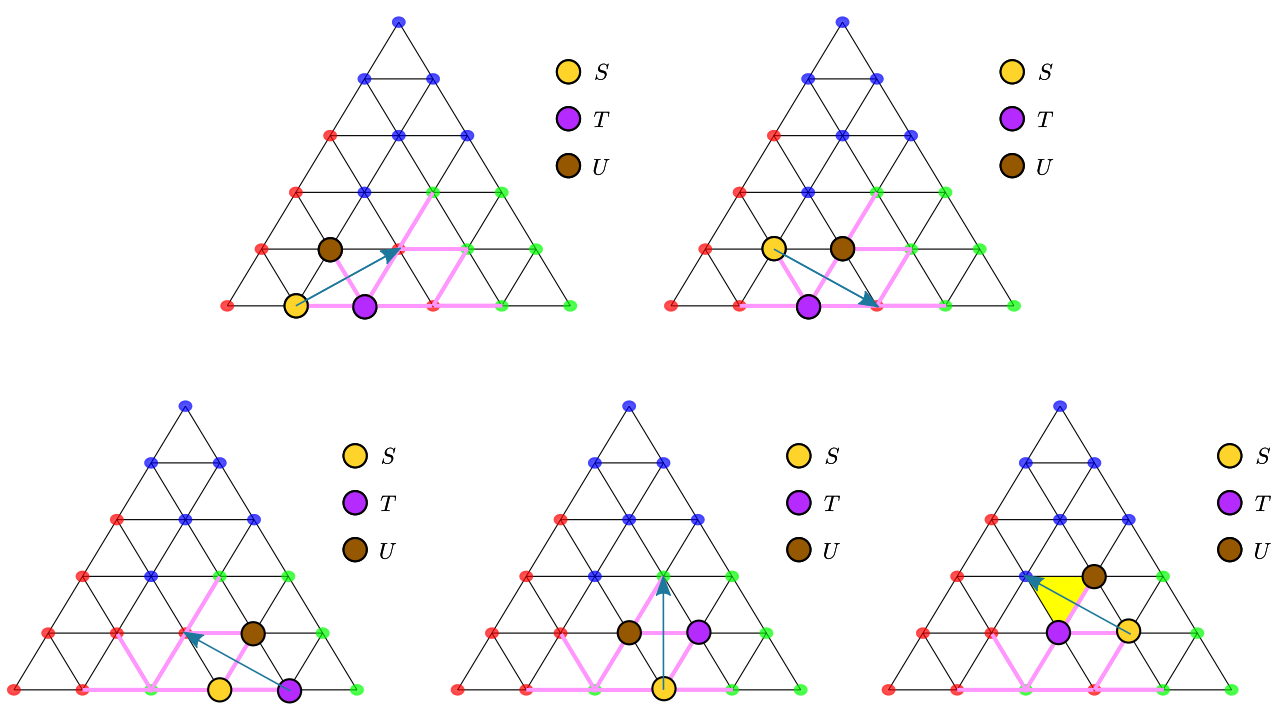
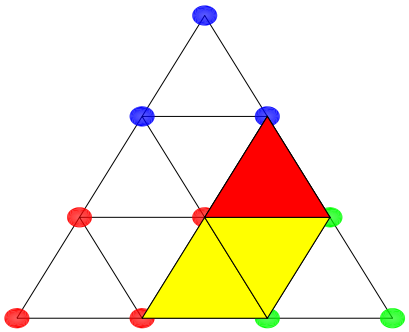


Figure 3.9 — Deux cas sont possibles au cours d'un tour dans la boucle *tant que* : soit (première ligne) la chaîne est bouclée, soit (deuxième ligne) la chaîne aboutit avec un triangle marqué.

On pourra une fois de plus demander un retour graphique à l'algorithme de sorte à ce qu'il affiche les chaînes et les triangles marqués qu'il trouve.

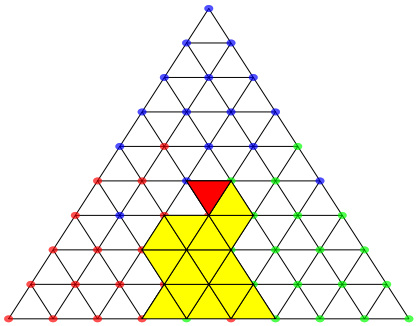
On a ainsi, en prenant le barycentre du triangle marqué qu'on trouve, un point pour lequel à $\epsilon < \frac{1}{n-1}$ près, chacun des trois joueurs choisit une part différente, ce qui solutionne notre problème.



$n = 4$

$\epsilon = 0.280$

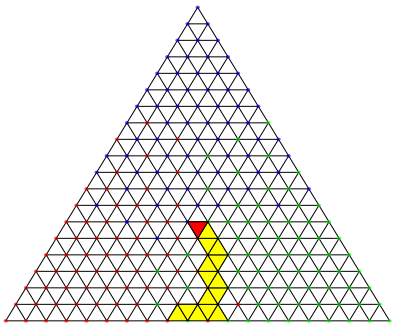
Barycentre : (0.083 ; 0.333 ; 0.333)



$n = 10$

$\epsilon = 0.112$

Barycentre : (0.367 ; 0.267 ; 0.267)



$n = 20$

$\epsilon = 0.056$

Barycentre : (0.283 ; 0.333 ; 0.333)

Figure 3.9 — Mise en œuvre de la boucle de recherche du triangle marqué sur les triangulations de la figure 3.6 ; on remarquera que le triangle marqué converge vers de barycentre de S_3.

Conclusion

Le lemme de Sperner est un résultat d'analyse combinatoire qui s'avère autant utile pour démontrer des théorèmes d'analyse pure tels que le *théorème de Brouwer* qu'en théorie des jeux pour résoudre des problèmes de partages. L'utilité du lemme de Sperner permet de montrer également des résultats géométriques comme le *théorème de Monsky* qui stipule qu'un parallélogramme ne peut être découpé en un nombre impair de triangles de même aire.

Concernant les problèmes de partages, nous ne nous sommes intéressés qu'au partage d'un gâteau entre trois personnes. Il est néanmoins possible d'étendre ce résultat au cas d'un partage entre n personnes.

Nous n'avons vu qu'une petite partie des résolutions de problèmes de partages avec Sperner, en effet le lemme est également utilisé pour résoudre des situations de partages autres que celle d'un gâteau, comme par exemple le partage d'un loyer.

Bibliographie

Article Wikipédia du Lemme de Sperner

Article Wikipédia du Théorème du point fixe de Brouwer

Article sur la démonstation du théorème de Brouwer avec Sperner : Donald Violette, « Applications du lemme de Sperner pour les triangles » , Bulletin AMQ, vol. XLVI, no 4, 2006, disponible en ligne

Vidéo Youtube : « A beautiful combinatorical proof of the Brouwer Fixed Point Theorem - Via Sperner's Lemma »

Vidéo Youtube : « NYT: Sperner's lemma defeats the rental harmony problem »

Article sur la démonstation du théorème de Brouwer avec Sperner : Christophe Bertault, « Applications du lemme de Sperner pour les triangles » , Lemme de Sperner et théorème de Brouwer, disponible en ligne

Article Wikipédia sur l'enveloppe convexe

Article Wikipédia sur les combinaisons convexes

Cours sur les combinaisons convexes